

مدل FDTD برای لایه ای از جنس دبابی با ضخامت کمتر از اندازه سلول

منصوره یوسفی تلوری^۱ بیژن ذاکری^۲

^۱ کارشناسی ارشد برق مخابرات گرایش میدان، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، yousefi_m67@yahoo.com
^۲ دانشیار گروه مخابرات میدان دانشکده برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، zakeri@nit.ac.ir

چکیده

در این مقاله، مدل‌سازی یک لایه نازک در شبکه FDTD در نظر گرفته شده است. جنس لایه می‌تواند دارای ویژگی‌های مختلف باشد که در این مقاله به بررسی محیط غیرپاشنده حاوی لایه نازک دبابی پرداخته شده است. فرض شده است که ضخامت لایه کمتر از اندازه سلول FDTD است. در واقع، سلول‌های شامل این لایه، ناهمگن می‌باشد. به منظور همگن سازی سلول ناهمگن از روش معادل مداری استفاده شده است. روش پیشنهادی با دقت خوبی برای الکترومغناطیسی پاسخگو است. استفاده از روش ارائه شده موجب عدم نیاز به محاسبات اضافی در طول شبیه سازی، و موجب کاهش حافظه ذخیره سازی و زمان اجرای برنامه می‌شود.

کلیدواژه

پاشنده، روش FDTD، معادل مداری، همگن سازی، دبابی، الکترومغناطیسی عددی.

مقدمه

بررسی مدل مداری لورنتس^۳ پرداخته است. ما در این مقاله معادل مداری محیط‌های پاشنده از نوع دبابی^۴ را بررسی کرده و پارامتر میدانی این محیط را استخراج نموده ایم و در ادامه به بررسی میدان الکتریکی حاصل از سلول ناهمگن و سلول همگن شده می‌پردازیم.

بخش بندی این مقاله بدین صورت می‌باشد که، در قسمت دوم به صورت مختصر به معرفی محیط‌های پاشنده و روش‌های پاسخگو به این محیط می‌پردازیم. سپس در بخش سوم همگن سازی سلول حاوی لایه نازک پاشنده دبابی توسط روش مدل مداری را شرح می‌دهیم. و در ادامه در بخش چهارم نتایج حاصل از شبیه سازی را نمایش داده و به بررسی آنها خواهیم پرداخت.

بررسی محیط‌های پاشنده

پاشندگی پدیده‌ایست که در آن سرعت فاز یک موج به فرکانس آن وابسته است. در محیط‌های پاشنده، ضریب شکست برای امواج با فرکانس‌های گوناگون ناهمسان است، به این دلیل امواج با فرکانس‌های گوناگون در این محیط‌ها با سرعت‌های گوناگون حرکت می‌کنند که موجب پاشش یا پاشیدگی آنها می‌گردد. پدیده‌ای که در منشور روی می‌دهد، نمونه‌ای از پاشندگی و منشور نمونه‌ای از یک محیط پاشنده است. تعریف محیط

روش FDTD یکی از شناخته شده ترین روش های مدل سازی امواج الکترومغناطیسی می باشد [۱]. این درحالی است که اگر سلولی از فضا متشکل از لایه ای ناهمگن از ماده دی-الکتریک یا هادی باشد این روش قابل اجرا نمی‌باشد، به این منظور به روش FDTD اصلاح شده روی آورده شد [۲ و ۳]؛ اما این روش به محاسبات اضافی در شبیه سازی سلول‌های FDTD ناهمگن نیاز دارد؛ و از طرفی این روش به محیط‌های غیرپاشنده اختصاص دارد و نمی‌تواند برای محیط پاشنده^۲ استفاده شود. به این ترتیب، برای حل چنین مسائلی به میانگین‌گیری ضریب گذردهی الکتریکی و ضریب نفوذ پذیری مغناطیسی محیط روی آورده شد [۴]؛ اما این روش تنها قادر به محاسبه میدان مماسی است و در غیر این صورت محاسبه ضریب گذردهی و ضریب نفوذ پذیری، اشتباه تخمین زده خواهد شد. به دلایل فوق، یک روش جدید برای محاسبه محیط حاوی لایه نازک پاشنده ارائه شده است [۵] که به همگن سازی سلول حاوی لایه می‌پردازد، در این روش نیاز به محاسبات اضافی در طول شبیه سازی برای پیاده سازی محیط پاشنده نمی‌باشد و به این ترتیب بدون نیاز ب حافظه و زمان اجرای اضافی به حل مسئله می‌پردازد. مقاله مورد اشاره، تنها به

^۳ Lorentz

^۴ Debye

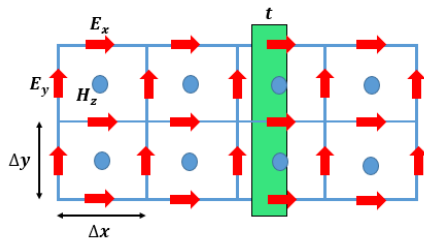
^۱ Finite Difference Time Domain

^۲ Dispersive

از سال ۱۹۹۰ برای مدل‌سازی محیط پاشنده در فضای FDTD تلاش‌هایی شده است که سه روش مرسوم تر آن عبارتند از: روش^۶ PLRC [۲۶]، روش تبدیل Z [۲۷]، روش معادله دیفرانسیلی کمکی^۷ ADE [۲۶]، که در این مقاله از روش ADE استفاده کردیم.

همگن سازی سلول حاوی لایه نازک دبابی

شکل ۱ شبکه FDTD در صفحه x-y را نشان می‌دهد که شامل یک لایه نازک پاشنده می‌باشد. فرض شده است که ضخامت لایه در راستای x، t و در راستای y ضریب صحیحی از تعدادی سلول است.

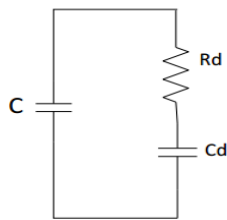


شکل ۱. شبکه FDTD شامل یک لایه نازک دبابی

در این مقاله از محیط دبابی به عنوان ماده پاشنده استفاده شده است [۱]:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty} + \frac{\Delta\varepsilon_p}{1 + j\omega\tau_p} \quad (۴)$$

خواص طیفی مدل دبابی مشابه یک شاخه RC موازی شده با یک خازن C می‌باشد [۶]:



شکل ۲. مدار معادل دبابی

به این ترتیب، برای ادمیتانس این مدار خواهیم داشت:

$$Y_d = j\omega C + \frac{j\omega C_d}{j\omega R_d C_d + 1} \quad (۵)$$

برای معادل سازی میدانی، ضریب گذردهی الکتریکی محیط با روابط زیر به ادمیتانس مداری مرتبط می‌شود [۷]:

$$\varepsilon = \frac{Y}{j\omega\Delta} \quad (۶)$$

پاشنده، به تعداد قطب‌های محیط بستگی دارد [۱]. به طوری که برای هرچه نزدیک شدن شبیه سازی به واقعیت، باید از تعداد قطب‌های بیشتری استفاده کنیم. اما به علت پیچیده شدن محاسبات، معمولاً از محیط‌های تک قطبی استفاده می‌شود. سه کلاس مهم از محیط‌های پاشنده برای مدلسازی با روش FDTD، محیط لورنتس، محیط درود^۵ و محیط دبابی می‌باشد.

هر محیط با توجه به تابع گذردهی الکتریکی، از محیط دیگر متمایز می‌شود. به این ترتیب برای محیط لورنتس تابع گذردهی الکتریکی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty} + \sum_{p=1}^p \frac{\Delta\varepsilon_p \omega_p^2}{\omega_p^2 + 2j\omega\omega_p - \omega^2} \quad (۱)$$

که $\varepsilon_{s,p}$ گذردهی نسبی در فرکانس صفر، $\varepsilon_{\infty,p}$ گذردهی نسبی در فرکانس بینهایت، $\Delta\varepsilon_p = \varepsilon_{\infty,p} - \varepsilon_{s,p}$ تغییرات گذردهی نسبی با توجه به جفت قطب لورنتس، ω_p فرکانس تشدید و δ_p ضریب میرایی می‌باشد. در این رابطه این محیط، یک یا تعداد بیشتری قطب مزدوج مختلط دارد.

در طول موج‌های نوری، ممکن است فعل و انفعالات امواج الکترومغناطیس با فلزات، با استفاده از فرمولاسیون پاشنده مهم باشد. در مقیاس ماکروسکوپی، برای چنین مدلسازی‌هایی از مدل درود استفاده می‌شود. برای محیط درود تابع گذردهی الکتریکی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty} - \sum_{p=1}^p \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - j\omega\gamma_p} \quad (۲)$$

که ω_p فرکانس تشدید درود و γ_p معکوس زمان آرامش قطب است. این محیط نیز می‌تواند یک یا تعداد بیشتری قطب داشته باشد.

دسته سوم محیط‌های پاشنده، محیط دبابی می‌باشد. این محیط نیز با تابع گذردهی الکتریکی زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty} + \sum_{p=1}^p \frac{\Delta\varepsilon_p}{1 + j\omega\tau_p} \quad (۳)$$

که $\varepsilon_{s,p}$ گذردهی نسبی در فرکانس صفر، $\varepsilon_{\infty,p}$ گذردهی نسبی در فرکانس بینهایت، $\Delta\varepsilon_p = \varepsilon_{\infty,p} - \varepsilon_{s,p}$ تغییرات گذردهی نسبی با توجه به قطب دبابی، زمان آرامش قطب می‌باشد.

^۶ Piecewise Linear Recursive Convolution

^۷ Auxiliary Differential Equation

^۵ Drude

$$C_{(x)} = (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \frac{\Delta y \Delta z}{t} \quad (14)$$

ادمیتانس کلی برای مدار شکل ۳ الف بصورت زیر بدست آمده است:

$$Y_{tot(x)} = \frac{j\omega C_1 j\omega C_2 Z_d + j\omega C_1}{(j\omega C_1 + j\omega C_2) Z_d + 1} \quad (15)$$

در ادامه می‌توانیم رابطه (۱۵) را بصورت رابطه (۱۶) تغییر داد:

$$Y_{tot(x)} = j\omega C_{12(x)} + \frac{A}{Z_d + \frac{1}{j\omega C_{add}}} \quad (16)$$

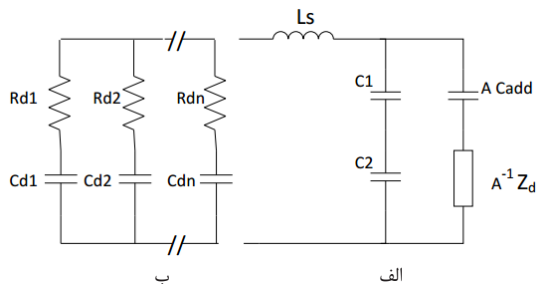
که در آن داریم:

$$C_{12(x)} = \frac{C_{1(x)} C_{2(x)}}{C_{1(x)} + C_{2(x)}} \quad (17)$$

$$C_{add} = \frac{1}{C_1 + C_2} \quad (18)$$

$$A = \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)^2 \quad (19)$$

به این ترتیب شکل ۳ الف معادل شکل ۴ الف خواهد بود.



شکل ۴ الف مدار معادل مربوط به مدار شکل ۳ الف و ب. شاخه مربوط به لایه دبابی

تبدیل مفاهیم مداری به همتای میدانی، منجر به ضرایب گذردهی الکتریکی و مولفه τ_p برای محیط دبابی، برای یک سلول همگن شده به نمایندگی از لایه نازک پاشنده می‌شود که در زیر نشان داده شده است:

$$\varepsilon_{\infty(x),new}^{-1} = k \varepsilon_{\infty(x)}^{-1} + (1-k) \varepsilon_{(x)}^{-1} \quad (20)$$

$$\varepsilon_{s(x),new} = \varepsilon_{\infty(x),new} + (k \cdot A^2)^{-1} \quad (21)$$

$$\cdot [(\varepsilon_{s(x)} - \varepsilon_{\infty(x)})^{-1} + [\varepsilon_{\infty(x)} + \varepsilon_{(x)} (k^{-1} - 1)^{-1}]^{-1}]^{-1} \quad (21)$$

$$\tau_{p,new} = \tau_p \cdot \left[1 + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_\infty + \varepsilon (k^{-1} - 1)^{-1}}\right]^{-1} \quad (22)$$

که در این روابط داریم:

$$k = \frac{t}{\Delta x} \quad (23 \text{ الف})$$

$$A = 1 + \frac{\varepsilon_{\infty(x)} (k^{-1} - 1)}{\varepsilon_{(x)}} \quad (23 \text{ ب})$$

به این ترتیب ضریب گذردهی الکتریکی برای محیط دبابی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon_{Debye} = \frac{Y_{Debye}}{j\omega \Delta} = \frac{1}{\Delta} \left(C + \frac{C_d}{1 + j\omega R_d C_d} \right) = \varepsilon_\infty + \frac{\Delta \varepsilon_p}{1 + j\omega \tau_p} \quad (7)$$

معادل میدانی عناصر فشرده بکار رفته شده در مدل مداری دبابی به قرار زیر است:

$$C_{(x)} = \varepsilon_\infty \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \quad (8)$$

$$R_{d(x)} = \frac{\tau_p}{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty} \frac{\Delta x}{\Delta y \Delta z} \quad (9)$$

$$C_{d(x)} = (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \quad (10)$$

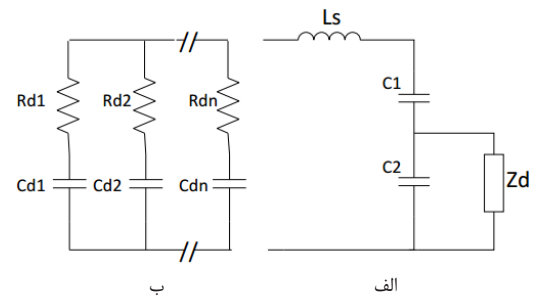
حال آنکه اگر ضخامت لایه پاشنده t کمتر از عرض یک سلول باشد امدانس لایه در راستای X با امدانس بقیه سلول بصورت سری قرار می‌گیرد. در نتیجه، شماتیک مداری مانند شکل ۳ الف می‌باشد که در آن، L_s نماینده میدان مغناطیسی محیط غیر پاشنده است و $C_{1(x)} (C_{2(x)})$ خازن مربوط به بخش غیر پاشنده (پاشنده) سلول می‌باشد:

$$C_{1(x)} = \varepsilon_{(x)} \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x - t} \quad (11)$$

$$C_{2(x)} = \varepsilon_{\infty(x)} \frac{\Delta y \Delta z}{t} \quad (12)$$

در این روابط $\varepsilon_{(x)}$ ضریب گذردهی الکتریکی محیط غیرپاشنده و $\varepsilon_{\infty(x)}$ ضریب گذردهی الکتریکی در فرکانس بینهایت از محیط دبابی در معادله شماره (۴) می‌باشد.

امدانس $Z_{d(x)}$ می‌تواند شامل n قطب پاشنده باشد که در شکل ۳ ب نشان داده شده است. و در صورت تک قطبی بودن لایه پاشنده تنها یک شاخه RC خواهیم داشت.



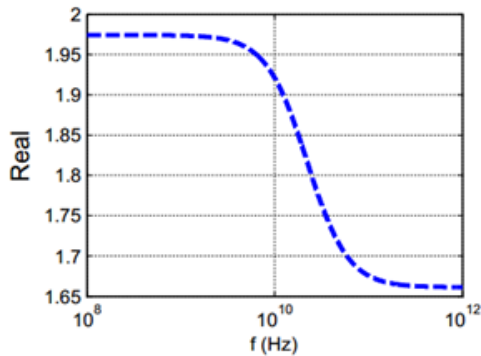
شکل ۳ الف. مولفه میدان الکتریکی در یک سلول شامل لایه نازک پاشنده از نوع دبابی (باتوجه به شکل ۱) ب. امدانس $Z_{d(x)}$ شامل n قطب

به این ترتیب برای معادل میدانی عناصر فشرده خواهیم داشت:

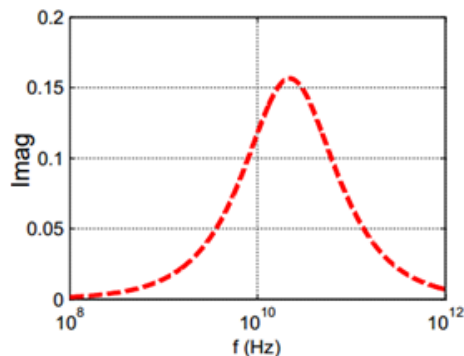
$$R_{d(x)} = \frac{\tau_p}{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty} \frac{t}{\Delta y \Delta z} \quad (13)$$

نتایج شبیه سازی

پس از همگن سازی با استفاده از روابط بدست آمده و مقادیر موجود در ستون سوم جدول ۱، به مقادیر ستون چهارم جدول ۱ رسیدیم. با توجه به این مقادیر و رابطه (۴) به نمودار گذردهی الکتریکی شکل ۶. الف وب رسیدیم.



الف



ب

شکل ۶. گذردهی الکتریکی دبابی تک قطبی مربوط به سلول همگن شده. الف. بخش حقیقی گذردهی الکتریکی ب. بخش موهومی گذردهی الکتریکی

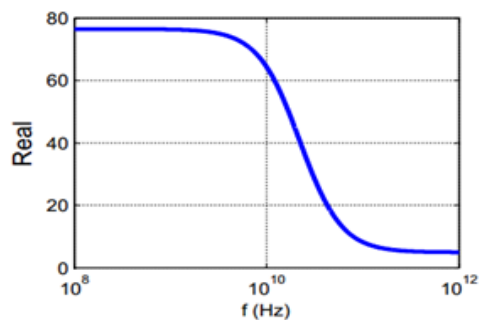
با مقایسه شکل های ۵ و ۶ می بینیم با همگن سازی سلول حاوی ماده دبابی، قسمت حقیقی گذردهی الکتریکی به حالت تعادل با محیط اطراف رسید. این در حالی است که قسمت موهومی آن به شدت کاهش یافت. همانگونه انتظار می رود فاکتور تلفات (τ_p) مربوط به رابطه (۴) تغییر خاصی نکرده است و این منطقی است که انتظار داشته باشیم پس از همگن سازی سلول، مقدار توان تلفات تحت تاثیر قرار نگیرد. در ادامه به بررسی اثر پارامترهای سلول همگن شده بر میدان می پردازیم.

برای پیاده سازی محیط دبابی از روش ADE استفاده کردیم. همانگونه که مطرح کردیم با سلولی مواجه هستیم که شامل یک لایه دبابی نازک تر از ضخامت سلول می باشد. در ابتدا به منظور یافتن میدان لایه دبابی، ضخامت سلول را به اندازه ای کاهش می دهیم که لایه به طور کامل در سلول قرار گیرد. به این ترتیب از شبکه FDTD با ضخامت سلول

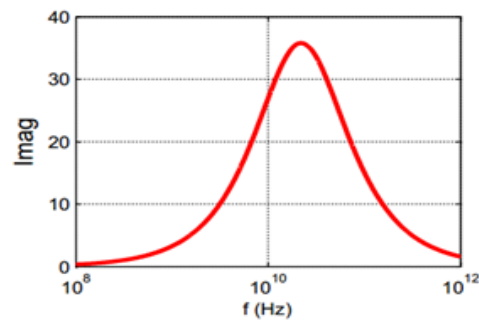
در بخش گذشته بر روی تبدیل مدل مداری شکل ۳ به شکل ۴ تمرکز کردیم و به این ترتیب یک سلول ناهمگن حاوی لایه نازک دبابی را همگن کردیم. در ادامه می خواهیم به مقایسه ضرایب گذردهی الکتریکی لایه نازک پاشنده و سلول همگن شده آن بپردازیم. به این منظور شبکه FDTD شکل ۱ با ابعاد $\Delta x = \Delta y = 1mm$ را در نظر می گیریم که شامل یک لایه نازک دبابی به ضخامت $t = 0.5mm$ است. فرض کردیم که لایه پاشنده تک قطبی می باشد. برای این لایه پارامترهای مذکور در ستون جدول ۱ را در نظر گرفتیم و با توجه به رابطه (۴) به ضریب گذردهی الکتریکی در شکل ۵. الف وب دست یافتیم.

جدول ۱. همگن سازی سلول حاوی لایه نازک دبابی

پارامترها	واحد	نا همگن	همگن شده
ϵ_{∞}	-	4.9	1.661
ϵ_s	-	76.47	1.9742
τ_p	ps	7.2	7.18

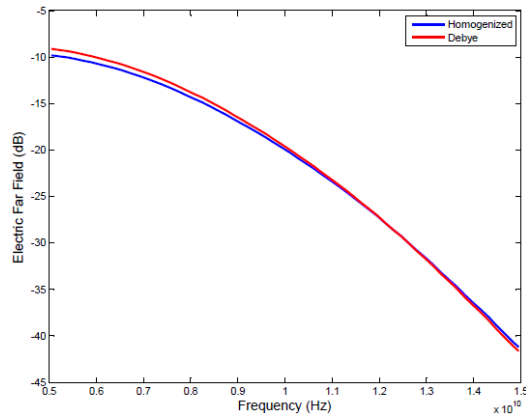


الف



ب

شکل ۵. گذردهی الکتریکی دبابی تک قطبی مربوط به لایه نازک دبابی با ضخامت 0.5 mm. الف. بخش حقیقی گذردهی الکتریکی ب. بخش موهومی گذردهی الکتریکی



شکل ۹. میدان لایه نازک دبی با ضخامت سلول 0.1 mm در مقایسه با میدان حاصل از سلول همگن شده

جدول ۱. عملکرد یارانه با حافظه ۳۲ گیگا بایت و واحد پردازش مرکزی CORE i7، برای حالات مختلف محیط FDTD

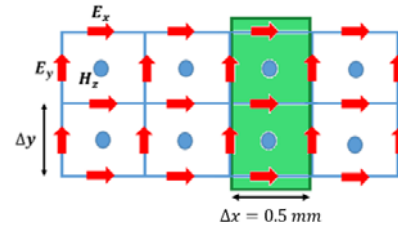
میزان استفاده برنامه از حافظه	زمان اجرای برنامه	محیط FDTD با ضخامت سلول
۶ گیگا بایت	۵ ساعت و ۲۳ دقیقه	محیط FDTD با ضخامت سلول 0.5 mm
۳۰ گیگا بایت	۸۵ ساعت	محیط FDTD با ضخامت سلول 0.1 mm
۱ گیگا بایت	۱ ساعت	محیط FDTD با استفاده از روش همگن سازی

با توجه به جدول ۱ به این نتایج دست میابیم که با استفاده از روش همگن سازی به شبکه FDTD با ضخامت سلول بزرگتر نیاز می‌باشد که این مسئله موجب نیاز به فضای شبیه سازی کمتر و در نتیجه حافظه ذخیره سازی و زمان اجرای برنامه کمتری می‌شود. همچنین با همگن سازی سلول با این روش، نیاز به محاسبات اضافی در طول شبیه سازی نمی‌باشد.

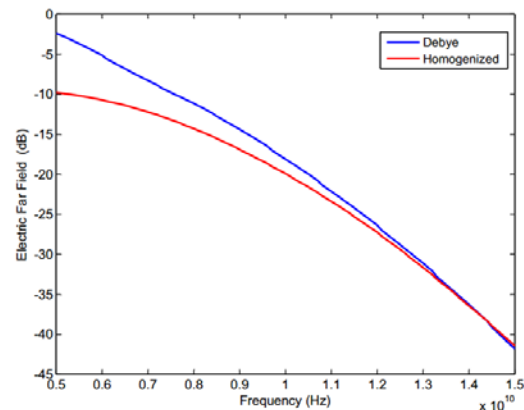
نتیجه گیری

در بسیاری از دستگاه های میکروویو با لایه ای نازک مواجه هستیم که پیاده سازی آن به عنوان سلولی ناهمگن در فضای شبیه سازی مورد توجه قرار گرفت. در این زمینه تلاش های متعددی شکل گرفت. روش همگن سازی با استفاده از مدار معادل شرایطی را مهیا می‌سازد که تعادل خوبی برای گذردهی الکتریکی سلول ناهمگن شامل ماده پاشنده و محیط غیر

لایه را در راه دور بدست آوردیم (شکل ۷). این میدان را با رنگ آبی در شکل ۸ نمایش دادیم.



شکل ۷. شبکه FDTD حاوی لایه دبی با ضخامت $t=0.5 \text{ mm}$ و اندازه سلول $\Delta x = \Delta y = 0.5 \text{ mm}$



شکل ۸. میدان لایه نازک دبی با ضخامت سلول 0.5 mm در مقایسه با میدان حاصل از سلول همگن شده

در ادامه با مقادیر مربوط به سلول همگن شده با ضخامت 1mm به محاسبه میدان در راه دور پرداختیم. این میدان را در شکل ۸ با رنگ قرمز نشان دادیم. همانگونه که در شکل ۸ می‌بینیم، دقت خوبی میدان ماده دبی را از طریق همگن سازی بدست آوردیم و برای هرچه دقیق تر بودن جواب لازم است ضخامت سلول مربوط به لایه دبی کوچکتر شود. به این منظور در ادامه ضخامت سلول حاوی ماده پاشنده را به 0.1 mm کاهش دادیم، به طوری که با محیط حاوی لایه دبی با ۵ سلول مواجه باشیم و دوباره با استفاده از روش ADE میدان راه دور را بدست آوردیم. همانگونه که در شکل ۹ نمایش دادیم با بالا بردن دقت توانستیم به نمودار حاصل از روابط همگن سازی نزدیک شویم.

enhanced FDTD analysis of microwave circuits,” in Proc. *24th Eur. Microw. Conf., Cannes, France*, vol. 2, pp.1530–1535, 1994.

- [4] W. H. P. Pernice, F. P. Payne, and D. F. G. Gallagher , “Finite-difference time-domain simulation of dispersive features smaller than the grid spacing,” *Int. J. Numer. Model.*, vol. 20, pp. , 311–326, 2007.
- [5] B. Salski , “An FDTD Model of a Thin Dispersive Layer,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 62, No. 9. 2014.
- [6] S. Grimnes and Q.G. Martinsen , “Bioimpedance and Bioelectricity Asics,” Oslo Norway: *Elsevier*, 2008.
- [7] A. Rennings, J. Mosig, C. Caloz, D. Erni, and P. Waldow , “Equivalent Circuit (EC) FDTD Method for the Modeling of Surface Plasmon Based Couplers,” *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience* Vol.5, 690–703. 2008.
- پاشنده بر قرار می‌کند، به گونه ای که به شدت قسمت حقیقی گذردهی الکتریکی را به گذردهی الکتریکی محیط اطراف ($\epsilon_r = 1$) نزدیک می‌کند و قسمت موهومی را نیز به صفر میل می‌دهد.
- همچنین با اعمال همگن سازی در پارامترهای محیط به این روش و محاسبه میدان، نیاز ب محاسبات اضافی در روند شبیه-سازی نمی‌باشد. و این درحالی است که به خوبی در حافظه ذخیره سازی و زمان اجرای برنامه صرفه جویی می‌شود.

مراجع

- [1] A. Taflove and S. C. Hagness, “Computational Electrodynamics_The Finite-Difference Time-Domain Method,” Boston, MA, USA: Artech House, 2005.
- [2] W. K. Gwarek , “Analysis of an arbitrarily-shaped planar circuit_A time-domain approach,” *IEEE Trans. Microw. Theory Techn.*, vol. MTT-33, no. 10. 1985, pp. 1067–1072.
- [3] M. Celuch-Marcysiak and W. K. Gwarek , “Higher order modeling of media surfaces for