

الگوریتم تخمین پارامتر بخش‌بندی مبتنی بر انرژی ضرایب تبدیل Curvelet

برای استخراج ویژگی و توصیف بافت در تصاویر SAR

غلامرضا اکبری‌زاده^۱، زینب تیرانداز^۲

۱. استادیار دانشکده مهندسی دانشگاه شهید چمران اهواز، g.akbari@scu.ac.ir

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد برق، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۹۲/۷/۲۹ تاریخ پذیرش: ۹۳/۴/۳۰

چکیده

تصاویر رادار روزنه ترکیبی (SAR) به دلیل داشتن رزولوشن بالا و تکنولوژی تصویربرداری منحصر به فرد، دارای کاربردهای زیادی در زمینه شناسایی اهداف، کشف معادن زیرزمینی، هواشناسی، کشاورزی و غیره هستند. با این حال، پردازش این نوع از تصاویر، به دلیل درگیر بودن آنها با نویزی موسوم به *Speckle* دشوار است. امروزه بخش‌بندی بافت نواحی مختلف تصاویر SAR بر اساس طراحی تابع *Kernel* با پارامترهای مناسب، مورد توجه قرار گرفته و با چالش اساسی روبه‌رو است. در این مقاله، الگوریتم تخمین پارامتر جدیدی برای طراحی تابع *Kernel* بهینه مورد نیاز در بخش‌بندی بافت تصاویر SAR ارائه شده است که در آن تبدیل *Curvelet* تنها در یک مرحله روی تصویر SAR اعمال شده و ضرایب لایه درونی به عنوان ویژگی‌های توصیفگر بافت استخراج می‌شوند. سپس یک تابع *Kernel* جدید بر اساس مقدار کشیدگی انرژی ضرایب *Curvelet* (KCE) تشکیل می‌شود. در مرحله بعد، بخش‌بندی بافت‌های مختلف با به کارگیری تابع تخمین یافته KCE انجام می‌شود. نتایج شبیه‌سازی و آزمایش‌ها، روی تصاویر شبیه‌سازی شده و نیز تصاویر حقیقی SAR ارائه شده است. این نتایج نشان می‌دهند که الگوریتم پیشنهادی برای بخش‌بندی و توصیف بافت‌های مختلف در تصاویر SAR مفید بوده و دارای خطای بخش‌بندی کمتری در مقایسه با سایر روش‌های قبلی است.

کلیدواژه

تصویر رادار روزنه ترکیبی (SAR)، آماره، کشیدگی انرژی *Curvelet* (KCE)، *Speckle*.

مقدمه

داده می‌شود و همچنین به دلیل استفاده از یک تابش مایکروویو با فرکانسی در محدوده ۱ تا ۱۰ گیگاهرتز، محدودیت‌های زمان خاصی از روز برای تصویربرداری و یا شرایط جوی مساعد در امر تصویر برداری در سیستم تصویربرداری SAR وجود نخواهد داشت [۱].

تصاویر SAR کاربرد وسیعی در منابع، محیط زیست، باستان‌شناسی، نظامی، سنجش از دور و غیره دارند. سیستم‌های تصویر برداری SAR دارای عملکردی بسیار خوب در تمام شرایط جوی، قابل استفاده در زمان‌های تصویربرداری هم در روز و هم در شب و نیز قادر به تولید تصاویر با رزولوشن مکانی زیاد^۱ هستند [۲]؛ اما مشکل عمده تصویربرداری SAR این است که پردازش تصاویر SAR به شدت پیچیده و فرآیندی بسیار مشکل بوده و با استفاده

در بسیاری از کاربردها مانند سیستم‌های مراقبت محیط، تشخیص و ردیابی اهداف ویژه، تهیه نقشه از منابع زمین و زیرزمین و توسعه سیستم‌های نظامی، معمولاً داشتن یک سیستم تصویربرداری امری ضروری است که این سیستم باید قادر به ایجاد تصاویر با رزولوشن بالا و در بر گیرنده نواحی وسیع بوده و همچنین در این کاربردها به سیستمی نیاز است که بتوان با این سیستم، تصویربرداری در شرایط بسیار بد آب و هوایی را انجام داد یا بتوان هنگام شب نیز به خوبی روز تصویربرداری کرد. سیستم تصویربرداری رادار روزنه ترکیبی^۱ (SAR) می‌تواند همه این نیازها را برآورده سازد. در سیستم تصویربرداری SAR، برای موج‌های بازتاب منعکس شده از اهداف مختلف، فرکانس‌های راداری منحصر به فردی اختصاص

2. High Spatial Resolution

1. Synthetic Aperture Radar (SAR)

از روش‌های معمول و مرسوم موجود، به راحتی قابل تحلیل و پردازش نیستند. این عیب در اثر وجود نویزی موسوم به نویز Speckle است که در تمامی تصاویر SAR وجود داشته و می‌توان آن را جزو خصوصیات جدانشدنی تصاویر SAR تلقی کرد [۳-۶]. نویز Speckle، یک نویز ضرب شونده با انحراف معیار برابر با مقدار بازتاب‌پذیری پیکسل‌های تصویر است که عموماً کل تصویر SAR را تحت تخریب قرار می‌دهد. یکی از دلایل عمده که بخش‌بندی دقیق و دسته‌بندی صحیح اشیا در تصاویر ماهواره‌ای SAR را با مشکلات جدی رو به رو می‌سازد، تاثیر مخرب نویز Speckle روی شدت روشنایی پیکسل‌های موجود در تصاویر SAR است.

در [۱] با استفاده از انرژی ضرایب تبدیل موجک و آماره مرتبه چهارم این ضرایب، یک ویژگی آماری مفید برای بخش‌بندی و تشخیص بافت در تصاویر SAR ارائه شده است. اگرچه این روش، نسبت به روش‌های قبلی، خطای بخش‌بندی را بهبود داده و توانسته است بدون اقدام به حذف نویز Speckle، تصویر SAR را بخش‌بندی کند ولی عیب اصلی این روش در این است که از تصویر SAR تا آخرین مرحله ممکن تبدیل موجک گرفته می‌شود و ضرایب تقریب موجک در هر مرحله استخراج شده و در بردار ویژگی استخراج شده برای توصیف بافت قرار داده می‌شود، بنابراین چالش عمده این روش در پیچیدگی محاسباتی زیاد و توصیف بافت با استفاده از تعداد بسیار زیادی از ضرایب است، زیرا در این روش، از تبدیل موجک تا آخرین مرحله ممکن وابسته به سایز تصویر SAR استفاده شده است و هر چه سایز تصویر بیشتر باشد، تعداد مراحل ممکن نیز افزایش یافته و تعداد ضرایب مورد نیاز برای توصیف بافت نیز بیشتر می‌شود و این یک چالش اساسی در روش ارائه شده در مرجع [۱] است. این موضوع وقتی اهمیت بیشتری پیدا خواهد کرد که بدانیم این الگوریتم برای کاربرد تحلیل تصاویر SAR ارائه شده و ویژگی اصلی تصاویر SAR نیز رزولوشن و اندازه بسیار بالای این نوع تصاویر خاص است و بنابراین اساساً روش ارائه شده در مرجع [۱] با مشکل مهم به کارگیری تعداد زیادی از ضرایب برای توصیف بافت روبه‌رو است.

در چند دهه گذشته برخی دیگر از روش‌ها نیز برای از بین بردن نویز Speckle توسعه یافته‌اند مانند فیلترینگ میانگین [۷]، فیلترینگ میانی، فیلترینگ آماری ترتیبی و روش‌های فیلترینگ دیگر که با استفاده از تبدیل‌های مختلف پیاده‌سازی شده‌اند. از میان این تبدیل‌ها، تبدیل موجک^۳ به طور گسترده‌ای استفاده شده است [۸، ۹]. برای سیگنال یک بعدی، تبدیل موجک قادر به نمایش بهینه از سیگنال تکه‌ای هموار^۴ با نقاط تکین است، اما برای سیگنال‌های دوبعدی مانند تصاویر، استفاده از تبدیل موجک

برای حذف نویز، چندان مناسب نیست، زیرا باعث تغییر در ویژگی‌های هندسی^۵ اشیا می‌گردد [۱۰]. با اینکه تبدیل موجک، امروزه در بسیاری از کاربردهای مختلف در پردازش تصویر استفاده شده است، ولی در شناسایی اهدافی که دارای لبه‌های منحنی‌وار هستند، ضعیف عمل می‌کند. علاوه بر این، برای آشکارسازی نقاط تکین لبه‌ها نیز مناسب نیست. این موضوع انگیزه‌ای برای توسعه تبدیل Curvelet و Ridgelet شده است [۱۱].

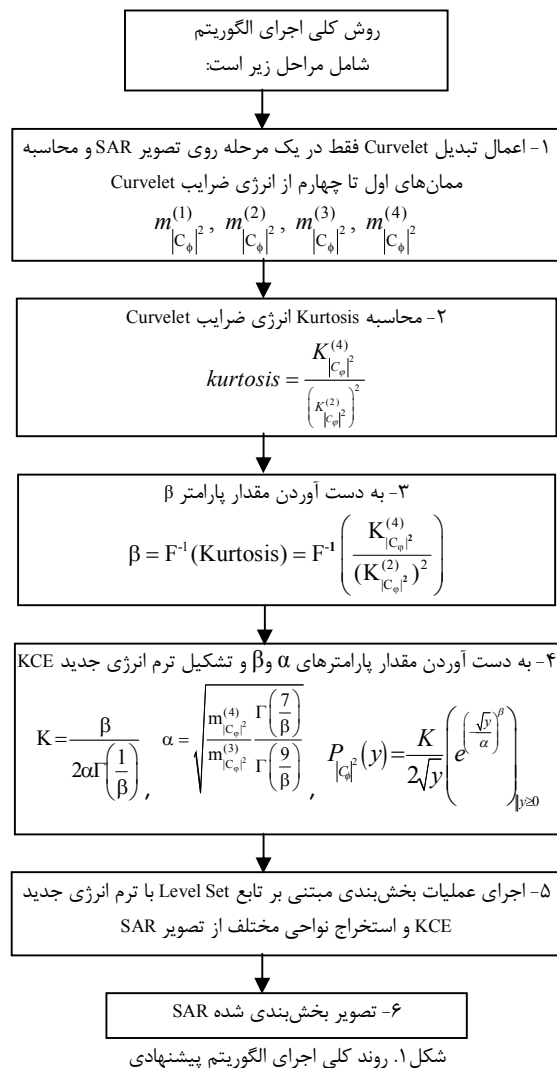
تبدیل Ridgelet اولین بار توسط کاندس پیشنهاد شد که به طور موثر برای نمایش سیگنال با خطوط تکین در فضای دوبعدی قابل استفاده است [۱۲]. برای نمایش بهتر سیگنال‌ها با منحنی منحصر به فرد و نقاط بیش از حد در ابعاد بالا، کاندس و دونوهو تبدیل Curvelet را پیشنهاد کرده‌اند که یک تبدیل هندسی است [۱۳]. توجه به از بین بردن نویز Speckle، هدف اصلی در نسل اولیه تبدیل Curvelet بود که برای آشکارسازی لبه‌هایی از تصویر مناسب عمل می‌کند که به شکل خطوط صاف و مستقیم باشند، اما همان طور که مشخص است لبه‌ها در تصاویر SAR عمدتاً به صورت منحنی هستند [۱۴]. در نسل دوم تبدیل Curvelet، این قابلیت نیز افزوده شده که لبه‌های منحنی مانند نیز نمایش داده شوند، بنابراین ضرایب این تبدیل، حاوی ویژگی‌های مفیدی از لبه‌های تصویر SAR هستند.

در این مقاله، استخراج یک ویژگی آماری جدید مبتنی بر ضرایب تبدیل Curvelet ارائه شده است که با توجه به مشکلات موجود در زمینه بخش‌بندی تصاویر SAR، این ویژگی می‌تواند به طور موثری استفاده شود. این ویژگی آماری طبق الگوریتمی به دست می‌آید که به طور خلاصه به این صورت می‌توان آن را بیان کرد: ابتدا از تصویر SAR تبدیل Curvelet فقط در یک مرحله گرفته و ضرایب تبدیل استخراج می‌شوند؛ سپس انرژی هر یک از ضرایب با به مربع رساندن هر ضریب، محاسبه می‌شود و به این ترتیب انرژی ضرایب Curvelet به دست می‌آید. در ادامه مقدار Kurtosis انرژی ضرایب Curvelet که در مرحله قبل به دست آمده، محاسبه می‌شود. این ویژگی که «کشیدگی انرژی Curvelet» (KCE)^۶ نامیده شده است، به عنوان Kernel و هسته اصلی از تابع Level set به منظور بخش‌بندی تصویر SAR قرار داده می‌شود.

این روش بر اساس معرفی و تعریف یک تابع انرژی جدید استوار است که از خاصیت آماره^۷ مرتبه چهارم نرمالیزه شده بهره می‌گیرد. در این مقاله با آزمایش‌های مختلفی که صورت خواهد گرفت، نشان داده خواهد شد که تابع انرژی KCE را می‌توان به

3. Wavelet
4. Piecewise Smooth

5. Geometric Features
6. Kurtosis Curvelet Energy
7. Cumulant



استخراج ویژگی برای بخش‌بندی تصاویر SAR

می‌توان نشان داد که آماره مرتبه چهارم^{۱۲} از یک متغیر تصادفی $|C_\phi|^2$ به عنوان توابعی از ممان‌ها^{۱۳} توسط رابطه زیر بیان می‌شود:

$$K_{|C_\phi|^2}^{(4)} = m_{|C_\phi|^2}^{(4)} - 4m_{|C_\phi|^2}^{(1)} m_{|C_\phi|^2}^{(3)} + 6(m_{|C_\phi|^2}^{(1)})^2 m_{|C_\phi|^2}^{(2)} - 3(m_{|C_\phi|^2}^{(1)})^4 \quad (1)$$

در رابطه بالا، $m_{|C_\phi|^2}^{(i)}$ نشان‌دهنده ممان مرتبه i از متغیرهای تصادفی $|C_\phi|^2$ است. متغیرهای تصادفی مورد استفاده در این مقاله، انرژی ضرایب تبدیل Curvelet $(|C_\phi|^2)$ هستند. یک عمل نرمالیزه کردن آماره‌های مرتبه بالاتر نیز معمولاً به کار برده می‌شود. آماره مرتبه چهارم نرمالیزه شده، به صورت رابطه زیر تعریف خواهد شد که Kurtosis نامیده می‌شود:

عنوان یک ویژگی سودمند^۸ برای متمایز کردن بافت^۹ در تصاویر SAR به کار برد. به عبارت دیگر، این تابع انرژی که دارای خاصیت آماری است، یک ویژگی بافت^{۱۰} بسیار خوب برای حل مسئله بخش‌بندی در تصاویر SAR به شمار می‌آید. آماره Kurtosis، یک آماره مرتبه چهارم نرمالیزه شده است که از مفاهیم آمارگان مرتبه بالا^{۱۱} در مباحث آمار نتیجه شده است. در این مقاله با پیاده‌سازی الگوریتم استخراج انرژی ضرایب Curvelet تابع انرژی KCE به دست می‌آید و با استفاده از آن یک ترم انرژی جدید برای تابع Level set ارائه خواهد شد. فرآیند بخش‌بندی با استفاده از این ترم انرژی جدید که مبتنی بر ویژگی KCE از تصویر SAR است، انجام می‌شود. این ویژگی نرمالیزه شده، برای بافت هر یک از نواحی موجود در تصویر SAR به صورت سراسری به دست می‌آید. ویژگی‌های آماری مربوط به بافت هر ناحیه از تصویر SAR را می‌توان توسط این ویژگی نرمالیزه شده به خوبی استخراج کرد، زیرا در طراحی فرمول مربوط به این ویژگی از آماره‌های مرتبه بالا (مرتبه چهارم) استفاده شده است. علت عملکرد خوب این ویژگی آن است که هرچه مرتبه یک آماره به عنوان یک ویژگی برای یک تصویر SAR افزایش یابد، این ویژگی قادر به ارائه خواص آماری بیشتری از یک ناحیه مطلوب از یک تصویر SAR بوده و متعاقباً این ویژگی باعث بهبود دقت فرآیند تشخیص بافت از تصویر SAR خواهد شد. نتایج آزمایش‌های انجام شده برای بخش‌بندی تصاویر SAR نشان‌دهنده قدرت این ویژگی جدید در بخش‌بندی صحیح تصویر SAR است. در شکل (۱) روند الگوریتم پیشنهادی در این مقاله نشان داده شده است.

این مقاله در ادامه از بخش‌های زیر تشکیل شده است: در بخش دوم، مرحله استخراج ویژگی برای بخش‌بندی تصویر SAR با محاسبه فرمول KCE به عنوان یک ویژگی مفید برای بخش‌بندی و تشخیص بافت در تصاویر SAR تشریح خواهد شد. در بخش سوم، نحوه محاسبه فرمول تابع Level set که دارای ترم انرژی KCE است، ارائه خواهد شد. در بخش چهارم، نتایج آزمایش‌های انجام شده الگوریتم پیشنهادی روی دو دسته مختلف از تصاویر SAR که یکی شامل تصویر سنتز شده و دیگری شامل تصویر حقیقی است، ارائه خواهند شد. در نهایت در بخش پنجم جمع‌بندی و پیشنهاداتی برای بهبود کار ارائه خواهد شد.

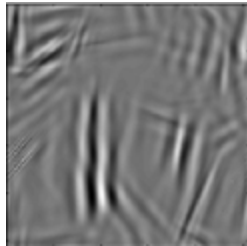
8. Efficient Feature
9. Texture Discrimination
10. Texture Feature
11. Higher Order Statistics (HOS)

12. Fourth Order Cumulant
13. Moments

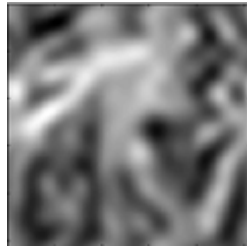
شکل ۲ (الف) تصویر اصلی و شکل‌های (ب) تا (ت)، ضرایب مقیاس را پس از بازسازی برای هر سه لایه نشان می‌دهد.



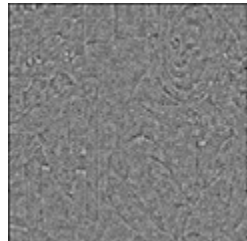
(الف)



(ب)



(ب)



(ت)

شکل ۲. تصویر اصلی و تصاویر بازسازی شده از هر یک از ضرایب مقیاس: (الف) تصویر اصلی (Barbara)؛ (ب) ضرایب لایه درونی؛ (پ) ضرایب لایه بیرونی و (ت) ضرایب لایه‌های میانی

ویژگی‌های هر لایه به وضوح در شکل (۲) دیده می‌شود. ضرایب لایه درونی نشان‌دهنده تقریب یا برآوردی از تصویر اصلی است. ضرایب لایه بیرونی منعکس‌کننده اطلاعات با فرکانس بالا از تصویر و لایه‌های میانی منعکس‌کننده ویژگی‌های لایه است.

نمایش بافت تصویر SAR با استفاده از انرژی ضرایب Curvelet

ایده اصلی ارائه شده در این مقاله، مشخص کردن بافت هر ناحیه در یک تصویر SAR با استفاده از انرژی ضرایب Curvelet است. به این منظور، می‌توان ضرایب هر یک از لایه‌ها را جداگانه در نظر گرفته، انرژی آنها را محاسبه کرده و سپس مقدار Kurtosis آنها را به دست آورد. با توجه به اینکه ضرایب لایه درونی که بیانگر اطلاعات فرکانس پایین تصویر بوده و تقریبی از تصویر اصلی هستند و از نظر اندازه نیز بسیار بزرگتر از سایر ضرایب هستند، بنابراین بیشتر اطلاعات اصلی تصویر توسط این ضرایب منعکس

$$kurtosis = \frac{K_{|C_\phi|^2}^{(4)}}{\left(K_{|C_\phi|^2}^{(2)}\right)^2} \quad (2)$$

در رابطه (۲)، Kurtosis آماره مرتبه چهارم است که با کوواریانس نرمالیزه شده است. آماره‌ی Kurtosis، بیانگر میزان نرخ کاهش شیب مربوط به منحنی PDF^{۱۴} از هیستوگرام^{۱۵} یک تصویر SAR است. در این مقاله، به کارگیری آماره نرمالیزه شده Kurtosis از انرژی ضرایب Curvelet به جای موجک به عنوان یک ویژگی بافت برای مرحله بخش‌بندی تصویر SAR از الگوریتم کلی، پیشنهاد می‌شود و نشان داده خواهد شد که این انتخاب، اطلاعات آماری بیشتری را در هر ناحیه از تصویر SAR در اختیار قرار داده و از نظر پیاده‌سازی محاسباتی نیز از ویژگی پیشنهاد شده در مرجع [۱]، عملکرد بهتری خواهد داشت.

تبدیل Curvelet گسسته (DCT)

تبدیل Curvelet از تابع f به صورت رابطه زیر است:

$$c(j, l, k) := \langle f, \phi_{j,l,k} \rangle \quad (3)$$

که در آن $\phi_{j,l,k}$ تابع Curvelet و j, l, k پارامترهای مقیاس، جهت و موقعیت هستند. ورودی این تبدیل، $f[t_1, t_2], (0 \leq t_1, t_2 \leq n)$ در سیستم مختصات دکارتی بوده، تبدیل Curvelet گسسته به صورت زیر است [۱۵]:

$$c^D(j, l, k) := \sum_{0 \leq t_1, t_2 \leq n} f[t_1, t_2] \phi_{j,l,k}^D[t_1, t_2] \quad (4)$$

ضرایب تبدیل Curvelet کلا به سه لایه مختلف تقسیم می‌شوند: لایه درونی^{۱۶}، لایه بیرونی^{۱۷} و لایه‌های مقیاس جزئی^{۱۸} (لایه میانی). لایه درونی شامل ماتریس ضرایب فرکانس پایین تصویر است؛ لایه بیرونی شامل ماتریس ضرایب فرکانس بالای تصویر است و لایه‌های مقیاس جزئی شامل ضرایب فرکانس‌های میانی از تصویر است. برای کار با فرکانس‌های دلخواه، باید لایه شامل این فرکانس‌های دلخواه را نگه داشته و سایر لایه‌ها را صفر نمود. باید توجه داشت که ضرایب موجود در لایه درونی، تقریبی از خود تصویر اصلی (به عنوان تابع ورودی تبدیل Curvelet) است؛ ضرایب لایه بیرونی شامل اطلاعات فرکانس‌های بالا از تصویر است و لایه‌های میانی، ویژگی‌های لایه‌های تصویر را در بر دارند. در شکل (۲)، برای نشان دادن ویژگی‌های هر یک از ضرایب Curvelet، با نگه داشتن یک لایه و تنظیم روی صفر لایه‌های دیگر در هر زمان، ضرایب مقیاس مختلف را با تبدیل تصویر Barbara نشان می‌دهیم.

14. Probability Density Function
15. Histogram
16. Innermost Layer
17. Outer Layer
18. Detail scale Layer

$$m_{|C_\phi|^2}^{(4)} = E\{|C_\phi|^8\} = \int_0^\infty (C_\phi)^8 p(C_\phi; \alpha, \beta) d(C_\phi) \quad (9)$$

$$= \frac{\alpha^8}{2\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)} \Gamma\left(\frac{9}{\beta}\right)$$

اکنون می توان α را از رابطه زیر به دست آورد:

$$\alpha = \sqrt{\frac{m_{|C_\phi|^2}^{(4)} \Gamma\left(\frac{7}{\beta}\right)}{m_{|C_\phi|^2}^{(3)} \Gamma\left(\frac{9}{\beta}\right)}} \quad (10)$$

فرمول $F(\beta) = Kurtosis(|C_\phi|^2)$ تابع را می توان با جایگزین کردن ممان های مرتبه اول تا چهارم یعنی $m_{|C_\phi|^2}^{(1)}$ ، $m_{|C_\phi|^2}^{(2)}$ ، $m_{|C_\phi|^2}^{(3)}$ و $m_{|C_\phi|^2}^{(4)}$ با مقادیر متناظرشان طبق رابطه (۱۱) به دست آورد:

$$F(\beta) = \frac{m_{|C_\phi|^2}^{(4)} - 4m_{|C_\phi|^2}^{(1)}m_{|C_\phi|^2}^{(3)} + 6(m_{|C_\phi|^2}^{(1)})^2m_{|C_\phi|^2}^{(2)} - 3(m_{|C_\phi|^2}^{(1)})^4}{(m_{|C_\phi|^2}^{(2)} - (m_{|C_\phi|^2}^{(1)})^2)^2} \quad (11)$$

$$= \frac{8\Gamma^3\left(\frac{1}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{9}{\beta}\right) - 16\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{7}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{3}{\beta}\right) + 12\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{5}{\beta}\right)\Gamma^2\left(\frac{3}{\beta}\right) - 3\Gamma^4\left(\frac{3}{\beta}\right)}{4\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}\right)\Gamma^2\left(\frac{5}{\beta}\right) - 4\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\Gamma^2\left(\frac{3}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{5}{\beta}\right) + \Gamma^4\left(\frac{3}{\beta}\right)}$$

حال مقدار پارامتر بخش بندی β را می توان به صورت رابطه زیر به دست آورد:

$$\beta = F^{-1}(Kurtosis) = F^{-1}\left(\frac{K_{|C_\phi|^2}^{(4)}}{(K_{|C_\phi|^2}^{(2)})^2}\right) \quad (12)$$

در این مقاله هدف، استفاده از ویژگی KCE به منظور بخش بندی نواحی مختلف از تصاویر SAR است؛ رابطه (۸)، توزیع انرژی ضرایب Curvelet را نشان می دهد که این رابطه دارای دو پارامتر α و β است که اگر این دو پارامتر به طور صحیحی تخمین زده شوند، رابطه (۸) به طور درست تخمین زده شده و آن را به عنوان کرنل برای تابع Level set قرار خواهیم داد. بدیهی است که K طبق رابطه (۷) به دست می آید؛ پس مقدار آن وابسته به مقادیر پارامترهای α و β است. مقدار پارامتر α نیز طبق رابطه (۱۰) از ممان های مرتبه سوم و چهارم انرژی ضرایب Curvelet و نیز با توجه به مقدار β به دست می آید، بنابراین چالش پیش رو، در واقع تخمین هرچه دقیق تر مقدار پارامتر β است. مقدار پارامتر β با توجه به رابطه (۱۲)، از Kurtosis گرفتن انرژی ضرایب Curvelet یعنی ویژگی جدید KCE تخمین زده می شود؛ به عبارتی

می شود؛ به همین دلیل در این مقاله به جای محاسبه انرژی ضرایب همه لایه ها، تنها انرژی ضرایب لایه درونی محاسبه شده و مقدار Kurtosis آنها به دست آمده است. مقدار به دست آمده، بیانگر یک ویژگی آماری است که در این مقاله از این مقدار به عنوان یک ویژگی برای مشخص کردن بافت استفاده خواهد شد. آزمایش های تجربی که اخیراً بر روی تصاویر انجام شده، نشان داده است که مشخصه نگاری بافت هر تصویر را می توان توسط توزیع ضرایب Curvelet در هر زیرباند تحقق داد که توزیع قدرمطلق این ضرایب نیز یک تابع چگالی احتمال گوسی به صورت رابطه زیر است [۱۶]:

$$p(C_\phi; \alpha, \beta) = \frac{\beta}{2\alpha\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)} e^{-\left(\frac{C_\phi}{\alpha}\right)^\beta} \quad (5)$$

که در رابطه بالا α واریانس، β نرخ کاهشی تابع چگالی گوسی و $\Gamma(\cdot)$ تابع گاما^{۱۹} است که طبق رابطه زیر محاسبه می شود [۱۶]:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z > 0 \quad (6)$$

در این مقاله، منظور از ضرایب Curvelet، ضرایب لایه درونی Curvelet است که به منظور تسهیل در بیان، در ادامه از ذکر واژه درونی صرف نظر شده است. برای ساده تر کردن شکل رابطه (۵)، پارامتر K را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$K = \frac{\beta}{2\alpha\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)} \quad (7)$$

می توان اثبات کرد که توزیع انرژی ضرایب Curvelet در هر لایه از هر تصویر (از جمله برای هر تصویر SAR) از فرم گوسی کلی زیر تبعیت می کند. (پیوست)

$$p_{|C_\phi|^2}(y) = \frac{\beta}{4\alpha\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\sqrt{y}} \left(e^{-\left(\frac{\sqrt{y}}{\alpha}\right)^\beta} \right)_{y \geq 0} \quad (8)$$

در رابطه بالا α و β پارامترهای بافت می باشند. با توجه به اینکه این رابطه برای هر یک از لایه ها به طور جداگانه برقرار است، بنابراین می توان گفت که رابطه (۸) بیانگر توزیع انرژی ضرایب لایه درونی نیز هست.

به منظور تعریف یک ویژگی بافت بر اساس Kurtosis، ابتدا باید ممان مرتبه چهارم از توزیع انرژی ضرایب Curvelet یعنی $m_{|C_\phi|^2}^{(4)}$ را طبق رابطه زیر محاسبه کرد:

در رابطه بالا، که رابطه مربوط به تابع Level Set مبتنی بر کانتور فعال است، C یک کانتور اولیه در ناحیه تصویر r می‌باشد که این کانتور تصویر را به دو ناحیه درون کانتور و بیرون کانتور تقسیم می‌کند، γ_1 و γ_2 دو عدد ثابت هستند، K کرنل تابع Level Set است که در این مقاله به جای این کرنل همان KCE قرار داده شده و $k_1(x)$ و $k_2(x)$ دو تابع هستند که بافت‌های تصویر را در نزدیکی پیکسل x منطبق می‌کنند که $k_1(x)$ بافت تصویر در ناحیه درون کانتور و $k_2(x)$ بافت تصویر در ناحیه بیرون کانتور است. پیکسل x را نقطه مرکزی از معادله ذکر شده گویند و انرژی مذکور را KCE حول نقطه مرکزی x می‌نامیم. یک تابع کرنل مفید $K(x)$ که در رابطه (۸) استخراج شده، باید در تابع انرژی KCE در رابطه (۱۴) استفاده شود.

نتایج شبیه‌سازی و آزمایش‌ها

به منظور توضیح و اثبات مزایای روش پیشنهادی KCE در مقایسه با روش‌های SCE و KWE، نتایج الگوریتم‌های مختلف روی تصاویر شبیه‌سازی شده و تصاویر واقعی SAR در این قسمت ارائه شده است.

بخش‌بندی تصاویر شبیه‌سازی شده SAR

به منظور ارزیابی واقعی عملکرد روش پیشنهادی، ابتدا آزمایشی بر روی یک تصویر شبیه‌سازی شده three-look SAR انجام شده است. فرآیند تولید یک تصویر شبیه‌سازی شده SAR برگرفته از نحوه تولید و شکل‌گیری تصویر را داری است. این امر با متوسط‌گیری از ضرب سه بار نویز گاما در یک تصویر انجام می‌شود. تصویر نویزی three-look نتیجه، همان طور که در شکل (۳-الف) نشان داده شده است، با متوسط‌گیری از سه بار اعمال کردن مستقل نویز speckle روی تصویر شفاف اصلی، حاصل شده است. تصویر شفاف اصلی که به آن تصویر زمین مرجع نیز اطلاق می‌شود، همان طور که در شکل (۳-ب) نشان داده شده است، برای محاسبه نرخ‌های خطای بخش‌بندی حاصل شده توسط الگوریتم‌های مختلف استفاده می‌شود.

KCE یک تخمینگر پارامتر و آن نیز یک ویژگی بافت است. در آزمایش‌هایی که در این مقاله ارائه خواهد شد، نشان داده شده است که KCE یک تخمینگر دقیق و قوی در مقایسه با سایر تخمینگرهای ارائه شده برای توصیف بافت در تصاویر SAR است.

محاسبه فرمول تابع Level Set با ترم انرژی KCE

مدل‌های کانتور فعال^{۲۱} معروف به مدل‌های مارپیچ^{۲۲} به عنوان یکی از روش‌های مبتنی بر ارزیابی منحنی برای انجام عملیات بخش‌بندی کلی تصویر استفاده شده‌اند [۱۷-۱۹]. برخی از این مدل‌ها بر اساس شدت روشنایی ناهمگن پیکسل‌ها بنا نهاده شده‌اند؛ با این وجود، به شدت روشنایی ناهمگن و غیریکنواخت که اغلب همراه با تصاویر SAR است، در هیچ‌یک از این روش‌ها اشاره نشده است.

در بخش قبل، یک روش جدید استخراج ویژگی بافت برای بخش‌بندی بافت‌های موجود در تصاویر SAR تشریح شد. در این بخش، این ویژگی در یک تابع Level set وارد شده و به منظور بخش‌بندی هر ناحیه بافتی در تصاویر SAR توسعه داده شده است. فرض کنید که $X \in \Gamma$ یک پیکسل دلخواه بوده و $I(x): \Gamma \rightarrow R^1$ یک بردار موجود از یک تصویر SAR باشد که 1 نشان‌دهنده بعد بردار $I(x)$ است. اکنون تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$F^{KCE}(L_1, L_2, \dots, L_K, f_1, f_2) = \varepsilon_x^{KCE}(L_1, L_2, \dots, L_K, f_1, f_2) + \mu\rho(L) \quad (13)$$

در رابطه بالا، μ یک عدد ثابت مثبت، ε_x^{KCE} انرژی KCE، f_1 و f_2 توابعی هستند که ε_x^{KCE} را مینیمم می‌کنند و $\rho(L)$ انحراف تابع Level set L از یک تابع فاصله علامت‌دار است. مقدار Kurtosis از انرژی ضرایب Curvelet به عنوان انرژی کانتور ε_x^{KCE} در رابطه (۱۳) پیشنهاد شده است.

اکنون می‌توان گفت که برای یک پیکسل داده شده $X \in \Gamma$ ، انرژی KCE ε_x^{KCE} از فرم توزیع انرژی Kurtosis مربوط به ضرایب Curvelet در هر لایه تبعیت می‌کند. برای هر نقطه $X \in \Gamma$ ، انرژی KCE که در این مقاله پیشنهاد شده، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\varepsilon_x^{KCE}(C, k_1(x), k_2(x)) = \gamma_1 \int_{\text{inside contour } (C)} K(x-y)|I(y)-k_1(x)|^2 dy + \gamma_2 \int_{\text{outside contour } (C)} K(x-y)|I(y)-k_2(x)|^2 dy \quad (14)$$

21. Active Contour
22. Snakes

یافته‌اند، بنابراین می‌توان چنین نتیجه گرفت که روش KWE بهتر از SCE و روش KCE بهتر از KWE عمل می‌کند. علاوه بر نتایج مبتنی بر ارقام و اعداد، نتایج مبتنی بر مشاهده نیز حائز اهمیت است. بخش‌بندی با استفاده از روش SCE که در شکل (۳-پ) نشان داده شده است، در نواحی خارج از مثلث واقع در وسط تصویر، به شدت نویزی است. پیکسل‌های بسیار زیادی از دو ناحیه با هم به اشتباه بخش‌بندی شده‌اند. همان طور که در شکل (۳-ت) نشان داده شده، روش KWE عملکرد بهتری نسبت به SCE دارد، بنابراین روش KWE در این مقایسه با مدل SCE نسبت به نویز مقاوم‌تر می‌باشد. در تمامی نتایج مشاهده می‌کنیم که پیکسل‌های با بخش‌بندی نادرست عموماً در نواحی خارج از مثلث واقع در وسط تصویر از شکل (۳-الف) واقع شده‌اند و نواحی داخل مثلث به درستی بخش‌بندی شده‌اند. همان طور که در شکل (۳-ث) نشان داده شده، در مقایسه با روش KWE، روش KCE تعداد پیکسل‌های با بخش‌بندی نادرست را کاهش داده است.

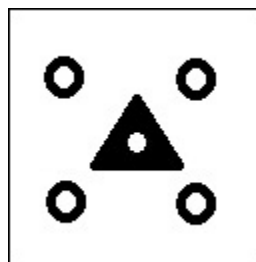
بخش‌بندی تصاویر حقیقی SAR

هنگامی که هدف بخش‌بندی تصاویر حقیقی SAR باشد، به دلیل در اختیار نداشتن تصویر زمین مرجع، دسترسی به تصویر با بخش‌بندی صحیح مقدور نیست. در این وضعیت، ارزیابی نتایج بخش‌بندی بر اساس درک شهودی و بصری از تصاویر بخش‌بندی شده استوار است.

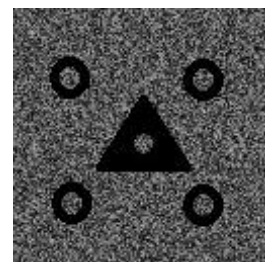
شکل (۴-الف) یک تصویر اصلی و حقیقی SAR را نشان می‌دهد. این تصویر از مجموعه داده‌های NASA/GSFC^{۲۳} با ۵ متر رزولوشن است که از نمای بالای فرودگاه China Lake در کالیفرنیا گرفته شده است. این تصویر در باند X گرفته شده و اندازه آن ۲۵۶ × ۲۵۶ است.

برای ارزیابی توانایی روش پیشنهادی در این مقاله، دو روش قبلی مانند SCE و KWE برای انجام مقایسه‌ها در آزمایش‌های انتخاب شده است. نتایج آزمایش‌ها با استفاده از مدل SCE در شکل (۴-ب) نشان داده شده است. نتایج آزمایش‌ها مربوط به مدل KWE در شکل (۴-پ) نشان داده شده است. نتایج حاصل از روش پیشنهادی در این مقاله، در شکل (۴-ت) نشان داده شده است. نسخه‌های بزرگنمایی شده از نواحی انتخاب شده در شکل‌های (۴-ث) تا (۴-چ) نشان داده شده‌اند.

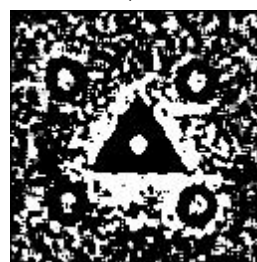
تصاویر نشان داده شده در شکل (۴) از سه پوشش مختلف زمین تشکیل شده‌اند: باند فرودگاه، ناحیه خالی و ساختمان‌ها. این تصاویر از مجموعه تصاویر نواحی شهری SAR هستند. با مشاهده نتایج بخش‌بندی به دست آمده توسط روش SCE که در شکل



(ب)



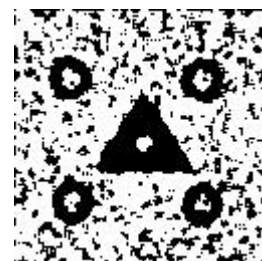
(الف)



(ت)



(پ)



(ث)

شکل ۳. الف) تصویر SAR شبیه‌سازی شده three-look (۱۲۸×۱۲۸)؛

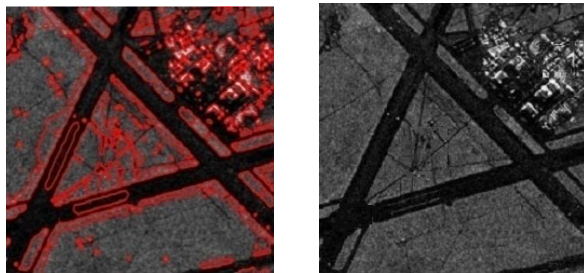
ب) تصویر شفاف اصلی (زمین مرجع)؛

پ) بخش‌بندی با استفاده از مدل SCE که در مرجع [۲۰] ارائه شده است (نرخ خطا: ۳/۰۹ درصد؛ تعداد پیکسل‌های با بخش‌بندی نادرست: ۵۰۶)؛ ت) بخش‌بندی با استفاده از مدل KWE که در مرجع [۱] ارائه شده است (نرخ خطا: ۱/۸۴ درصد؛ تعداد پیکسل‌های با بخش‌بندی نادرست: ۳۰۱) و ث) بخش‌بندی با استفاده از مدل KCE پیشنهاد شده در این مقاله (نرخ خطا: ۰/۷۴ درصد؛ تعداد پیکسل‌های با بخش‌بندی نادرست: ۱۲۱).

در این آزمایش‌ها سه الگوریتم مختلف برای بخش‌بندی تصاویر SAR پیاده‌سازی شده‌اند و این نتایج با هم مقایسه شده‌اند که به ترتیب عبارتند از: ۱) مدل SCE [۲۰]؛ ۲) الگوریتم KWE [۱] و ۳) الگوریتم KCE پیشنهادی. شکل (۳-پ) نتایج بخش‌بندی با مدل SCE را نشان می‌دهد. شکل (۳-ت) نتایج بخش‌بندی با استفاده از مدل KWE را نشان می‌دهد که بهتر از مدل SCE است. شکل (۳-ث) نشان‌دهنده بهترین نتایج بخش‌بندی بر اساس نرخ خطاست. با توجه به این نتایج می‌توان دریافت که نرخ‌های خطا از ۳/۰۹ درصد به ۱/۸۴ درصد با استفاده از روش KWE و به ۰/۷۴ درصد با استفاده از روش KCE کاهش

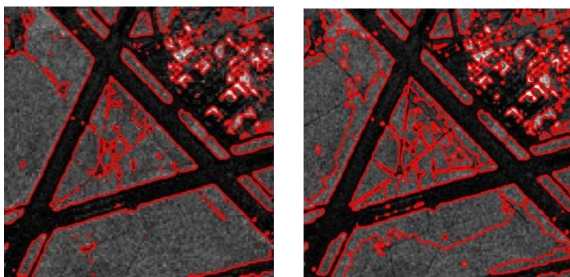
23. National Aeronautics and Space Administration (NASA) Goddard Space Flight Center

کرد. نتایج آزمایش‌ها نیز نشان می‌دهند که روش پیشنهادی الگوریتم (KCE) برای عملیات بخش‌بندی انواع مختلف از تصاویر SAR به مراتب بهتر از روش‌های قبلی است.



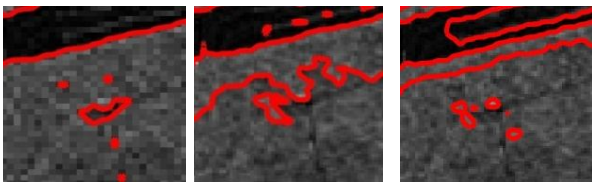
(ب)

(الف)



(ت)

(پ)



(چ)

(ج)

(ث)

شکل ۴. (الف) تصویر X-SAR با ۵ متر رزولوشن (۲۵۶×۲۵۶)؛ (ب) بخش‌بندی حاصل شده توسط مدل SCE؛ (پ) بخش‌بندی حاصل شده توسط روش KWE؛ (ت) بخش‌بندی حاصل توسط روش KCE پیشنهاد شده در این مقاله؛ (ث) [به ترتیب (ج) و (چ)] بزرگنمایی از یک ناحیه استخراج شده از تصویر شکل (ب) [به ترتیب (پ) و (ت)].

سپاسگزاری

این مقاله برگرفته از نتایج تحقیق در راستای یک پایان‌نامه کارشناسی ارشد می‌باشد که توسط دانشگاه شهید چمران اهواز در قالب پژوهانه (اعتبار ویژه پژوهشی) سال ۱۳۹۳ طبق قرارداد گرنت به شماره ۲۷۱۷۱/۰۲/۳/۹۳ حمایت مالی شده است. نویسندگان مقاله از حمایت‌های معنوی و مادی دانشگاه شهید چمران اهواز از این مقاله و پایان‌نامه، تشکر و قدردانی می‌کنند.

(۴-ب) نشان داده شده می‌توان دریافت که ناحیه شامل باند فرودگاه (قسمت پایین و سمت چپ تصویر) به طور نادرست بخش‌بندی شده است. به عبارت دیگر، مدل SCE، در مواجهه با نواحی ویژه‌ای مانند باند فرودگاه با مشکل مواجه خواهد شد. علاوه بر این، مرز بین ناحیه خالی و باند فرودگاه به خوبی تعریف نشده است. بخش‌بندی به دست آمده توسط روش KWE، همان طور که در شکل (۴-پ) نشان داده شده است، یکنواختی در بخش‌بندی نواحی شامل باند فرودگاه را بهبود داده است؛ اما باز هم بخش‌بندی‌های نادرستی در نواحی شامل ناحیه خالی [تصویر بزرگنمایی شده از یک ناحیه دلخواه در شکل (۴-پ) را ببینید] مشهود است. علاوه بر این، هر دو روش SCE و KWE در بخش‌بندی بخش کوچکی از باند فرودگاه در منطقه وسیع خالی، دچار خطا شده‌اند. روش KCE بهترین نتیجه بخش‌بندی را همان طور که در شکل (۴-ت) و تصویر بزرگنمایی بخشی از آن در شکل (۴-چ) نشان داده شده، در بر دارد.

عملیات بخش‌بندی که توسط KCE حاصل شده، یکنواختی حاصل در بخش‌بندی نواحی شامل باند فرودگاه که در پوشش وسیع و یکنواخت از شکل (۴-چ) نشان داده شده [در پوشش وسیع و یکنواخت را به درستی تشخیص داده است. سه نوع پوشش زمینی موجود در شکل (۴-الف) به درستی به عنوان نواحی مربوطه با استفاده از الگوریتم تخمین پارامتر KCE تشخیص داده می‌شوند. علاوه بر این، مرز نواحی نیز به خوبی توسط روش KCE تعیین می‌شوند.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک الگوریتم بخش‌بندی جدید مبتنی بر مقدار Kurtosis از انرژی ضرایب Curvelet برای بخش‌بندی نواحی مختلف از تصاویر SAR پیشنهاد شده و روابط ریاضی مربوط به آن استخراج و با استفاده از نرم‌افزار MATLAB بر روی تصاویر SAR پیاده‌سازی شده است. یک انرژی جدید، به نام KCE پیشنهاد شده است که به عنوان یک ویژگی بسیار مفید برای تمایز بافت هر ناحیه مورد استفاده قرار می‌گیرد. در مقایسه با مدل بخش‌بندی SCE، روش KCE عملکرد بهتری روی تصاویر SAR دارد. الگوریتم KCE در مقایسه با روش KWE هم در بسیاری از موارد بهتر عمل می‌کند، زیرا الگوریتم KCE اطلاعات آماری بیشتری از بافت‌های یک تصویر SAR استخراج می‌کند و این ناشی از بالاتر بودن مرتبه آماره مربوط به Kurtosis و ویژگی منحصر به فرد تبدیل Curvelet در تشخیص منحنی‌های لبه‌ای است. علاوه بر این، بافت تصویر SAR را توسط روش KCE پیشنهادی با تعداد بسیار کمتری از ضرایب نسبت به روش KWE می‌توان توصیف

$$P_{X^2}(y) = \frac{d P_{X^2}(y)}{dy} = \frac{K}{2\sqrt{y}} e^{-\left(\frac{\sqrt{y}}{\alpha}\right)^\beta} = \frac{\beta}{4\alpha\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\sqrt{y}} e^{-\left(\frac{\sqrt{y}}{\alpha}\right)^\beta}$$

اثبات رابطه (۱):

که همان رابطه (۸) است.

اثبات رابطه (۹):

با توجه به اینکه توزیع قدرمطلق ضرایب Curvelet در هر لایه، از

رابطه کلی گوسی $h(|C_\phi|) = K e^{-\left(\frac{|C_\phi|}{\alpha}\right)^\beta}$ تبعیت می کند،

بنابراین می توان تابع $h(|C_\phi|)$ را به عنوان تابع چگالی احتمال

متغیر تصادفی $|C_\phi|^2$ در نظر گرفت. با توجه به فرمول تابع گامای

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} u^{t-1} \cdot e^{-u} \cdot du$$

تصادفی X که به صورت کلی

$$m_X^{(4)} = E\{X^4\} = \int_0^{+\infty} X^4 P_X(x) dx$$

داشت:

$$m_{|C_\phi|^2}^{(4)} = E\{|C_\phi|^8\} = \int_0^{+\infty} (C_\phi)^8 \cdot K e^{-\left(\frac{C_\phi}{\alpha}\right)^\beta} d(C_\phi)$$

با اعمال تغییر متغیر $\left(\frac{C_\phi}{\alpha}\right)^\beta = u$ خواهیم داشت:

$$\left(\frac{C_\phi}{\alpha}\right)^\beta = u \Rightarrow \frac{C_\phi}{\alpha} = u^{\frac{1}{\beta}} \Rightarrow C_\phi = \alpha \cdot u^{\frac{1}{\beta}} \Rightarrow dC_\phi = \frac{\alpha}{\beta} u^{\frac{1}{\beta}-1} du$$

$$m_{|C_\phi|^2}^{(4)} = K \int_0^{+\infty} \alpha^8 \times u^{\frac{8}{\beta}} \times e^{-u} \times \frac{\alpha}{\beta} \times u^{\frac{1}{\beta}-1} du$$

$$= \frac{K\alpha^9}{\beta} \int_0^{+\infty} e^{-u} \times u^{\frac{9}{\beta}-1} du = \frac{K\alpha^9}{\beta} \Gamma\left(\frac{9}{\beta}\right)$$

اثبات رابطه (۱۰):

طبق محاسباتی مشابه اثبات قبل، می توان ثابت کرد که ممان

مرتبه سوم انرژی ضرایب Curvelet از رابطه زیر به دست می آید:

$$m_{|C_\phi|^2}^{(3)} = \frac{K\alpha^7}{\beta} \Gamma\left(\frac{7}{\beta}\right)$$

با تقسیم ممان مرتبه چهارم به ممان مرتبه سوم خواهیم داشت:

$$\frac{m_{|C_\phi|^2}^{(4)}}{m_{|C_\phi|^2}^{(3)}} = \frac{\frac{K\alpha^9}{\beta} \Gamma\left(\frac{9}{\beta}\right)}{\frac{K\alpha^7}{\beta} \Gamma\left(\frac{7}{\beta}\right)} = \frac{\alpha^2 \Gamma\left(\frac{9}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{\beta}\right)}$$

با توجه به تعاریف ممان ها و آماره ها، آماره مرتبه اول $(K_x^{(1)})$

همان ممان مرتبه اول $(m_x^{(1)})$ است که با μ (میانگین) نمایش

داده می شود، یعنی:

$$K_x^{(1)} = m_x^{(1)} = E\{x^1\} = \mu$$

به همین ترتیب، آماره مرتبه دوم برابر با تفاضل مربع ممان مرتبه اول از ممان مرتبه دوم است که کواریانس نامیده می شود:

$$K_x^{(2)} = E\{x^2\} - (E\{x\})^2 = m_x^{(2)} - \{m_x^{(1)}\}^2 = \sigma^2$$

آماره مرتبه سوم، نیز پس از محاسبه $E\{(x-\mu)^3\}$ برحسب ممان های مرتبه اول تا سوم از رابطه زیر به دست می آید:

$$K_x^{(3)} = m_x^{(3)} - 3m_x^{(1)} \cdot m_x^{(2)} + 2\{m_x^{(1)}\}^3$$

از تعریف آماره مرتبه چهارم که همان expected value تصادفی x حول میانگین (μ) است، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} K_x^{(4)} &= E\{(x-\mu)^4\} = E\{(x-\mu)^2 \cdot (x-\mu)^2\} \\ &= E\{x^4 - 4x^3\mu + 6x^2\mu^2 - 4x\mu^3 + \mu^4\} \\ &= m_x^{(4)} - 4m_x^{(3)} \cdot m_x^{(1)} + 6m_x^{(2)} \cdot \{m_x^{(1)}\}^2 - 4m_x^{(1)} \cdot \{m_x^{(1)}\}^3 + \{m_x^{(1)}\}^4 \\ &= m_x^{(4)} - 4m_x^{(3)} \cdot m_x^{(1)} + 6m_x^{(2)} \cdot \{m_x^{(1)}\}^2 - 3\{m_x^{(1)}\}^4 \end{aligned}$$

با جای گذاری $x = |C_\phi|^2$ به رابطه (۱) خواهیم رسید.

اثبات رابطه (۸):

اگر برای سادگی، متغیر تصادفی انرژی ضرایب Curvelet را به جای نماد $|C_\phi|^2$ نماد X^2 نشان دهیم، با توجه به اینکه تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X^2 را می توان طبق رابطه گوسی شکل (۵) فرض کرد، بنابراین تابع توزیع تجمعی را طبق تعریف آن در آمار و احتمالات، می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} P_{X^2}(y) &= P(X^2 \leq y) = P(|X| \leq \sqrt{y}) = \int_0^{\sqrt{y}} P_{|X|}(|x|) d(|x|) \\ &= \int_0^{\sqrt{y}} p(C_\phi; \alpha, \beta) d(|C_\phi|) = K \int_0^{\sqrt{y}} e^{-\left(\frac{|C_\phi|}{\alpha}\right)^\beta} d(|C_\phi|) \end{aligned}$$

با به کارگیری تغییر متغیر $|C_\phi| = \sqrt{y}$ خواهیم داشت (برای $y \geq 0$):

$$P_{X^2}(y) = K \int_0^{\sqrt{y}} e^{-\left(\frac{\sqrt{y}}{\alpha}\right)^\beta} d(\sqrt{y}) = \frac{K}{2} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-\left(\frac{\sqrt{y}}{\alpha}\right)^\beta} \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

با توجه به اینکه $P_{X^2}(y)$ ، تابع توزیع تجمعی انرژی ضرایب Curvelet هر لایه است، بنابراین می توان تابع چگالی احتمال را با مشتق گرفتن از رابطه قبل به صورت زیر محاسبه نمود:

$$m_{|C_{\phi}|^2}^{(1)} = \frac{K\alpha^3}{\beta} \Gamma\left(\frac{3}{\beta}\right)$$

با توجه به رابطه (۲) مربوط به kurtosis خواهیم داشت:

$$\text{Kurtosis} = F(\beta)$$

$$= \frac{m_{|C_{\phi}|^2}^{(4)} - 4m_{|C_{\phi}|^2}^{(1)} \cdot m_{|C_{\phi}|^2}^{(3)} + 6(m_{|C_{\phi}|^2}^{(1)})^2 \cdot m_{|C_{\phi}|^2}^{(2)} - 3(m_{|C_{\phi}|^2}^{(1)})^4}{\left(m_{|C_{\phi}|^2}^{(2)} - (m_{|C_{\phi}|^2}^{(1)})^2\right)^2}$$

حال با قرار دادن مقادیر ممان‌های اول، دوم، سوم و چهارم در رابطه بالا، خواهیم داشت:

حال α را از رابطه بالا می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{7}{\beta}\right) \times m_{|C_{\phi}|^2}^{(4)}}{\Gamma\left(\frac{9}{\beta}\right) \times m_{|C_{\phi}|^2}^{(3)}}}$$

اثبات رابطه (۱۱):

با محاسبات مشابهی می‌توان اثبات کرد که فرمول ممان‌های مرتبه اول و دوم نیز به صورت زیر هستند:

$$m_{|C_{\phi}|^2}^{(2)} = \frac{K\alpha^5}{\beta} \Gamma\left(\frac{5}{\beta}\right)$$

$$\text{Kurtosis} = F(\beta)$$

$$= \frac{\frac{K\alpha^9}{\beta} \Gamma\left(\frac{9}{\beta}\right) - 4 \frac{K\alpha^3}{\beta} \Gamma\left(\frac{3}{\beta}\right) \cdot \frac{K\alpha^7}{\beta} \Gamma\left(\frac{7}{\beta}\right) + 6 \left(\frac{K\alpha^3}{\beta} \Gamma\left(\frac{3}{\beta}\right)\right)^2 \cdot \frac{K\alpha^5}{\beta} \Gamma\left(\frac{5}{\beta}\right) - 3 \left(\frac{K\alpha^3}{\beta} \Gamma\left(\frac{3}{\beta}\right)\right)^4}{\left(\frac{K\alpha^5}{\beta} \Gamma\left(\frac{5}{\beta}\right) - \left(\frac{K\alpha^3}{\beta} \Gamma\left(\frac{3}{\beta}\right)\right)^2\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{K\alpha^9}{\beta} \Gamma\left(\frac{9}{\beta}\right) - 4 \frac{K^2 \alpha^{10}}{\beta^2} \Gamma\left(\frac{3}{\beta}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{7}{\beta}\right) + 6 \frac{K^3 \alpha^{11}}{\beta^3} \Gamma^2\left(\frac{3}{\beta}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{5}{\beta}\right) - 3 \frac{K^4 \alpha^{12}}{\beta^4} \Gamma^4\left(\frac{3}{\beta}\right)}{\left(\frac{K\alpha^5}{\beta} \Gamma\left(\frac{5}{\beta}\right) - \left(\frac{K\alpha^3}{\beta} \Gamma\left(\frac{3}{\beta}\right)\right)^2\right)^2}$$

حال در رابطه بالا، به جای K مقدار معادل آن را بر حسب α و β با توجه به رابطه (۷)، قرار می‌دهیم و آن را ساده می‌کنیم:

$$\Rightarrow F(\beta) = \frac{8\Gamma^3\left(\frac{1}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{9}{\beta}\right) - 16\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{7}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{3}{\beta}\right) + 12\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{5}{\beta}\right)\Gamma^2\left(\frac{3}{\beta}\right) - 3\Gamma^4\left(\frac{3}{\beta}\right)}{4\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}\right)\Gamma^2\left(\frac{5}{\beta}\right) - 4\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\Gamma^2\left(\frac{3}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{5}{\beta}\right) + \Gamma^4\left(\frac{3}{\beta}\right)}$$

- [10] F. Colonna, and G. Easley, "Generalized discrete Radon transforms and their use in the Ridgelet transform", *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 23, pp. 145–165, 2005.
- [11] J. L. Stark, E. J. Candes, and D. Donoho, "The curvelet transform for image denoising", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 11, 2002.
- [12] E. J. Candes, "Ridgelets: Theory and applications", Dept. of Statistics, Stanford Univ., in Proc., 1998.
- [13] J. L. Starck, E. Candes, and D. L. Donoho, "Astronomical Image Representation by the Curvelet Transform," *Astronomy and Astrophysics*, Vol. 39, no. 2, pp. 785–800, August 2003.
- [14] M. O. Ulfarsson, J. R. Sveinsson, and J. A. Benediktsson, "Speckle restrain of SAR images in the curvelet domain", *IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS 2002)*, Toronto, vol. 1, pp. 315-317, 2002.
- [15] J. Shen, Q. Li, and G. Erlebacher, "Hybrid no-reference natural image quality assessment of noisy, blurry, jpeg2000, and jpeg images," *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 20, No. 8, pp. 2089-2098, Aug. 2011.
- [16] F. Gómez and E. Romero, "Rotation invariant texture characterization using a curvelet based descriptor," *Pattern Recognition Letters*, Vol. 32, pp. 2178-2186, Oct. 2011.
- [17] S. Balla-Arabe, X. Gao, B. Wang, F. Yang, and V. Brost, "Multi-Kernel Implicit Curve Evolution for Selected Texture Region Segmentation in VHR Satellite Images," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 52, No. 8, pp. 5183-5192, August 2014.
- [18] O. Michailovich, Y. Rathi, and A. Tannenbaum, "Image segmentation using active contours driven by the bhattacharyya gradient flow," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 16, no. 11, pp. 2787–2801, Nov. 2007.
- [19] C. Li, C. Xu, C. Gui, and M. D. Fox, "Level set evolution without re-initialization: A new variational formulation," *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, Vol. 1, pp. 430–436, June 2005.
- [20] X. Zhang, L. Jiao, F. Liu, L. Bo and M. Gong, "Spectral Clustering Ensemble Applied to SAR Image Segmentation," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 46, No. 7, pp. 2126–2136, July 2008.
- [1] G. Akbarizadeh, "A New statistical-Based Kurtosis Wavelet Energy Feature for Texture Recognition of SAR Images," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 50, No. 11, pp. 4358-4368, November 2012.
- [2] F. Peng, H. Li, B. Cai, D. Deng, and Y. Liang, "Study on Transmitting Mode and Imaging Algorithm of MIMO-SAR," *Intelligent Science and Intelligent Data Engineering*, Springer Berlin Heidelberg, Vol. 7202, pp. 745-752, 2012.
- [3] A. Alonso-Gonzalez, C. Lopez-Martinez, and P. Salembier, "Filtering and Segmentation of Polarimetric SAR Data Based on Binary Partition Trees", *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 50, No. 2, pp. 593–605, February 2012.
- [4] S. Parrilli, M. Poderico, C. Vincenzo, and L. Verdoliva, "A Nonlocal SAR Image Denoising Algorithm Based on LLMMSE Wavelet Shrinkage," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 50, No. 2, pp. 606–616, February 2012.
- [5] T. Esch, A. Schenk, T. Ullmann, M. Thiel, A. Roth, and S. Dech, "Characterization of Land Cover Types in TerraSAR-X Images by Combined Analysis of Speckle Statistics and Intensity Information," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 49, no. 6, pp. 1911–1925, June 2011.
- [6] K. Ersahin, I. G. Cumming, and R. K. Ward, "Segmentation and Classification of Polarimetric SAR Data Using Spectral Graph Partitioning," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 48, no. 1, pp. 164–174, January 2010.
- [7] G. Changlai, "Image-denoising method based on wavelet transform and mean filtering", *Opto-Electronic Engineering*, vol. 34, no. 1, pp.72-75, 2007.
- [8] E. J. Candès, and D. L. Donoho, "New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise C2 singularities", *Comm. Pure and Applied Mathematics*, vol. 57, no. 2, pp. 219–266, 2004.
- [9] J. L. Starck, E. Candes, and D. Donoho, "The Curvelet Transform for Image Denoising," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 11, no. 6, 2002.

