

بهبود روش هموارسازی فضایی در تخمین جهت ورود سیگنال‌های باند باریک با معرفی تکنیکی به منظور حذف نویز در المان‌های آرایه محدود آنتن

غلامرضا باقریان^۱، سید محمد جواد رضوی^۲، حسین خالقی بیزکی^۳

کارشناس ارشد برق، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، gholamreza.bagherian@yahoo.com

^۲ استادیار برق، دانشگاه صنعتی مالک اشتر

^۳ استادیار برق، دانشگاه صنعتی مالک اشتر

تاریخ دریافت: ۹۳/۵/۷ تاریخ پذیرش: ۹۳/۸/۵

چکیده

در این مقاله دو روش برای تخمین جهت سیگنال‌های باند باریک و همبسته ارائه می‌شود. محاسبات ساده، دقت بالا برای سیگنال به نویزهای پایین و نیاز به تعداد عناصر کم در آنتن گیرنده از ویژگی‌های بارز این روش نسبت به روش‌های متداول می‌باشد. همچنین این روش‌ها را می‌توان برای الگوریتم‌های معروفی چون MUSIC، Root-MUSIC، ESPRIT که مختص تخمین جهت سیگنال‌های باند باریک ناهمبسته می‌باشند، برای سیگنال‌های همبسته نیز به کار برد. اساس کار در روش‌های ارائه شده محاسبه میانگین بردارهای همبستگی متقابل بین سیگنال دریافتی عناصر در زیر آرایه‌ها و یک عنصر خارج از آن است. در این مقاله به کمک نرم افزار MATLAB ویژگی روش‌های پیشنهادی با FBSS و FOSS و مقایسه و تأیید شده است.

کلید واژه‌ها

تکنیک پیشرو-پسرو، تکنیک پیشرو، جهت ورود سیگنال، سیگنال‌های همبسته، سیگنال‌های باند باریک، روش زیر فضایی

مقدمه

CEM^۱ [۸]، SAA^۲ [۹] و... ارائه شده است. در [۳] با استفاده از مشتق اول طیف توان الگوریتم MUSIC زوایای سیگنال‌های نزدیک به هم به خوبی تخمین زده می‌شود. در روش [۴] کل عناصر آنتن گیرنده به دو زیر آرایه با تعداد عناصر مساوی تقسیم می‌شود. اختلاف سیگنال‌های دریافتی در دو زیر آرایه به صورت یک ماتریس قطری ظاهر می‌شود که درایه‌های آن با زوایای سیگنال‌ها رابطه داشته و با تخمین ماتریس فوق زوایای سیگنال‌ها به دست می‌آید. این روش نیاز به محاسبات کمتری نسبت به MUSIC دارد [۱۰]. در [۵] زیر فضای سیگنال و نویز بدون تجزیه ماتریس کواریانس سیگنال دریافتی عناصر، به مقادیر ویژه و بردارهای ویژه به دست می‌آید. این امر محاسبات کمتری را نسبت به الگوریتم ESPRIT در بر خواهد داشت. الگوریتم ارائه شده در [۶] بر اساس یافتن ریشه‌های یک چند جمله‌ای است که همواره در داخل دایره واحد قرار دارند. با یافتن ریشه‌ها، زوایای سیگنال‌ها به دست می‌آید. دقت تخمین در این روش نسبت به MUSIC بالاتر است [۱۱]. در روش [۷] با استفاده از بردارهای ویژه مربوط به زیرفضای نویز و یک ماتریس با درمینان غیر صفر یک چند جمله‌ای استخراج و با استفاده از آن زوایای سیگنال‌ها تخمین زده می‌شود. در [۸] از درایه‌های زیر قطر اصلی ماتریس کواریانس سیگنال‌های دریافتی که با زوایای سیگنال‌ها رابطه دارند، استفاده شده است. در این روش نیز ریشه‌های یک چند جمله‌ای محاسبه و

تخمین جهت سیگنال‌های باند باریک کاربرد فراوانی در زلزله شناسی، آکوستیک، سونار، رادار، سیستم‌های ارتباط سیار و... دارد. یکی از روش‌های معروف و پر کاربرد در این زمینه روش زیر فضای است. در این روش با یافتن دو زیر فضای متعامد سیگنال و نویز و جستجوی ماکزیمم توان در فضای سیگنال، زوایای سیگنال‌های ارسالی مورد نظر به دست می‌آیند. به دلیل کارایی بالای این روش الگوریتم‌های زیادی که اساس کار آنها روش زیر فضایی می‌باشند، ارائه شده است. الگوریتم MUSIC^۱ اولین الگوریتمی بود که بر اساس روش زیرفضایی توسط اشمیت ارائه شد [۱]. در این الگوریتم ماتریس کواریانس سیگنال‌های دریافتی عناصر به مقادیر ویژه و بردارهای ویژه تجزیه شده و بردارهای ویژه مربوط به کوچکترین و بزرگترین مقادیر ویژه به ترتیب زیر فضای نویز و سیگنال را تشکیل می‌دهند. اما این الگوریتم برای حالتی که زوایای سیگنال‌ها نزدیک به هم، تعداد عناصر آنتن گیرنده کم و سیگنال به نویز پایین باشد، کارایی خود را از دست می‌دهد [۲]. به منظور رفع این مشکل در چند دهه اخیر الگوریتم‌هایی مانند [۳]، ESPRIT^۳ [۴]، PM^۴ [۵]، Root MUSIC [۶]، IPR^۵ [۷]،

1. Subspace method
2. Multiple Signal Classification
3. Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques
4. Propagator method
5. Improved Polynomial rooting

6. Characteristic Equation-base Method
7. Shirvani-Akbari Array

هرچند در دهه اخیر الگوریتم‌های زیادی که دقت تخمین بالای دارند، ارائه شده است اما این الگوریتم‌ها نیاز به تعداد عناصر زیاد و یا محاسبات پیچیده‌تری نسبت به روش پیشنهادی دارند. به عنوان مثال در الگوریتم ESPRIT-Like که از روی درایه‌های ماتریس کواریانس سیگنال دریافتی عناصر، یک ماتریس توپلیتز استخراج می‌شود و مرتبه آن همواره برای حالتی که سیگنال‌ها همبسته باشند کامل است، حداقل نیاز به $2K+1$ عنصر در آنتن گیرنده دارد [۱۵].

[۱۶] نیز از روش‌هایی است که دقت بالایی در تخمین زوایا دارد اما در این روش محاسبات با افزایش تعداد سیگنال‌ها زیاد می‌شود. اساس کار در این روش استفاده از درایه‌های ماتریس کواریانس سیگنال‌های دریافتی عناصر و یافتن ریشه‌های چند جمله‌ای که ضرایب آن مجموعه‌ای از جمع و ضرب درایه‌های ماتریس کواریانس است، می‌باشد. با افزایش تعداد سیگنال‌ها درجه چند جمله‌ای زیادتر شده و محاسبات پیچیده‌تر خواهد شد.

یکی دیگر از الگوریتم‌هایی که دارای دقت بالایی در تخمین زوایای سیگنال‌های همبسته نزدیک به هم است 10 MMUSIC می‌باشد [۱۷]. این الگوریتم حالت خاصی از روش FBSS است. هرچند در این الگوریتم محاسبات چندان پیچیده نیست اما حداقل تعداد عناصر مورد نیاز در آنتن گیرنده برابر $2K+1$ می‌باشد. همچنین این الگوریتم برای سیگنال به نویزهای پایین کارایی ندارد. در [۱۸] نیز به الگوریتمی اشاره شده که از ترکیب ESPRIT و FBSS به دست آمده است. با وجود اینکه در این الگوریتم خطای تخمین زوایای سیگنال‌ها کم است اما تعداد عناصر مورد نیاز در آنتن گیرنده $3K/2$ می‌باشد. همچنین در الگوریتم CEM که زوایای سیگنال‌های همبسته را با دقت بالایی تخمین می‌زند، تعداد عناصر زیاد در آنتن گیرنده شرط اصلی در کارایی بودن این الگوریتم می‌باشد [۱۹].

به هر حال روش پیشنهادی نسبت به الگوریتم‌های اشاره شده، نیاز به عناصر کمتری در آنتن گیرنده داشته و خطای حاصل از تخمین زوایا در آن کمتر است. این روش برای تمام الگوریتم‌هایی که در حالت ناهمبستگی سیگنال‌ها کارایی دارند [۱۱-۱] قابل استفاده بوده و می‌تواند برای حالتی که سیگنال‌ها همبسته هستند نیز به کار برده شود.

اساس کار در این روش محاسبه بردار همبستگی متقابل بین سیگنال‌های دریافتی عناصر در یک زیر آرایه و یک عنصر خارج از زیر آرایه و میانگین‌گیری آن در تمام زیر آرایه‌های انتخابی می‌باشد. این امر با فرض ناهمبسته بودن نویزها در عناصر، باعث حذف عامل نویز در محاسبات و کامل شدن مرتبه ماتریس کواریانس خواهد شد. با تجزیه ماتریس کواریانس به دست آمده به مقادیر ویژه و بردارهای ویژه، زیر فضای سیگنال و نویز استخراج و به

زوایای سیگنال‌ها تخمین زده می‌شود. در [۹] اساس کار جابه‌جایی دو عنصر آنتن گیرنده است. این امر باعث می‌شود زوایای سیگنال‌هایی که نزدیک به ۹۰ و ۹۰- است به خوبی تخمین زده شود.

در هر صورت وقتی سیگنال‌ها همبسته باشند (مانند وجود پدیده چند مسیری) ماتریس کواریانس سیگنال دریافتی عناصر از مرتبه کامل نبوده و نمی‌توان زیر فضای سیگنال و نویز را استخراج کرد [۱۳-۱۲] و در نتیجه الگوریتم‌های [۱۱-۱] کارایی خود را از دست می‌دهند. برای حل این مشکل روش‌های زیادی ارائه شده است [۱۸-۱۲]. یکی از روش‌های معروف و پر کاربرد 8 FBSS و 9 FOSS است [۱۲]. در این روش کل عناصر آنتن گیرنده به ترتیب به L زیر آرایه پیشرو و پیشرو-پسرو تقسیم شده و با محاسبه میانگین ماتریس کواریانس در L زیر آرایه مرتبه ماتریس کامل می‌شود. بنابراین با استفاده از این روش‌ها می‌توان الگوریتم‌های [۱۱-۱] را برای حالتی که سیگنال‌ها همبسته‌اند، نیز به کار برد. اما محاسبات زیاد، خطای زیاد برای سیگنال به نویزهای پایین، نیاز به انتخاب زیر آرایه زیاد و کارایی پایین برای حالتی که زوایای سیگنال‌ها نزدیک به هم باشند، از معایب این دو روش به شمار می‌رود. هر چند روش‌هایی برای عملکرد بهتر FOSS و FBSS وقتی زوایای سیگنال‌ها نزدیک به هم است، ارائه شده است [۱۴] اما معایب دیگر چندان بهبود نیافته‌اند. (در روش [۱۴] با توان دوم ماتریس کواریانس پیشرو، مقادیر ویژه نیز به توان دوم رسیده و استخراج زیر فضای سیگنال و نویز بهتر صورت می‌گیرد).

روش ارائه شده در این مقاله معایب FBSS و FOSS نداشته و بر خلاف FOSS و FBSS که برای تخمین K سیگنال همبسته به ترتیب نیاز به حداقل $L=K$ و $L=K/2$ زیر آرایه دارد (نیاز به حداقل $2K$ و $3K/2$ عنصر در آنتن گیرنده [۱۲]) به $L=K/4+1$ زیر آرایه نیاز دارد (نیاز به حداقل $5K/4+1$ عنصر در آنتن گیرنده). در این روش با محاسبه بردار همبستگی متقابل بین سیگنال‌های دریافتی عناصر در یک زیر آرایه و یک عنصر خارج از آن (به جای محاسبه ماتریس کواریانس در هر زیر آرایه [۱۲]) عامل نویز در ماتریس کواریانس سیگنال‌های دریافتی حذف (با فرض ناهمبسته بودن نویز در عناصر) و در نتیجه برای سیگنال به نویزهای پایین خطای کمتری نسبت به دو روش FBSS و FOSS خواهد داشت.

همچنین در این روش برای محاسبه بردارهای همبستگی در هر زیر آرایه نیاز به تنها M عمل ضرب به جای M^2 عمل ضرب جهت محاسبه ماتریس کواریانس زیر آرایه‌ها در FBSS و FOSS می‌باشد.

8. Forward-Backward Spatial Smoothing

9. Forward Only Spatial Smoothing

10. Modified MUSIC

$$s_k(t - \tau) \approx s_k(t)e^{-j2\pi f_0 \tau} \quad (2)$$

با توجه به شکل ۱ و در نظر گرفتن سیگنال دریافتی عنصر اول به عنوان سیگنال مرجع، برای سیگنال بدون نویز عنصر M_0 داریم:

$$x_i(t) = x_1(t - \tau_i(\theta_k)) = \sum_{k=1}^K s_k(t - \tau_i(\theta_k)) = \sum_{k=1}^K s_k(t)e^{-j2\pi f_0 \tau_i(\theta_k)} ; i = 1, 2, \dots, M_0 \quad (3)$$

$x_1(t)$ و $x_i(t)$ به ترتیب سیگنال دریافتی بدون نویز عنصر اول و عنصر M_0 در لحظه t بوده و $\tau_i(\theta_k)$ زمان تاخیر بین $x_1(t)$ و $x_i(t)$ وقتی سیگنال k ام در جهت θ_k دریافت می‌شود، است و می‌توان آنرا به صورت زیر به دست آورد:

$$\tau_i(\theta_k) = \frac{(i-1)d \cos(\theta_k)}{c} ; i = 1, 2, \dots, M_0 \quad (4)$$

بنابراین سیگنال دریافتی عنصر M_0 در لحظه t در نظر گرفتن اثر نویز در عناصر به صورت زیر خواهد بود:

$$y_i(t) = x_i(t) + w_i(t) = \sum_{k=1}^K s_k(t)e^{-j2\pi f_0 \tau_i(\theta_k)} + w_i(t) ; i = 1, 2, \dots, M_0 \quad (5)$$

که $y_i(t)$ و $w_i(t)$ به ترتیب سیگنال دریافتی و نویز جمع شونده عنصر M_0 می‌باشند.

M_0 سیگنال دریافتی در رابطه (۵) را می‌توان به فرم برداری زیر بیان نمود:

$$y(t) = As(t) + w(t) \quad (6)$$

که

$$y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_{M_0}(t)]^T$$

$$A = [a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_K)]$$

$$S(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_K(t)]^T$$

$$w(t) = [w_1(t), w_2(t), \dots, w_{M_0}(t)]^T$$

T ترانهاده ماتریس و بردار $a(\theta_k)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a(\theta_k) = [1, \theta_k, \theta_k^2, \dots, \theta_k^{M_0-1}]^T ; k = 1, 2, \dots, K \quad (7)$$

که

$$\theta_k^{i-1} = e^{-j2\pi f_0 \tau_i(\theta_k)} ; i = 1, 2, \dots, M_0$$

در این مقاله فرض‌های زیر در نظر گرفته شده است:

۱- تعداد سیگنال‌ها کمتر از تعداد کل عناصر آنتن گیرنده است یعنی $M_0 > K$

۲- سیگنال‌ها از نوع فرآیند ایستادن با میانگین صفر و واریانس زیر می‌باشند:

$$E\{s_i(t)s_j^*(t)\} = (r_{s_i} - r_{s_{ij}})\delta_{ij} + r_{s_{ij}}$$

$$E\{s_i(t)s_j(t)\} = 0 ; i, j = 1, 2, \dots, K \quad (8)$$

که $E(\cdot)$ ، $(\cdot)^*$ و δ_{ij} به ترتیب امیدریاضی یا متوسط آماری، مزدوج مختلط و دلتا کرونکر است.

۳- نویز جمع شونده هر عنصر از نوع فرآیند گوسی سفید مختلط با میانگین صفر و واریانس زیر می‌باشد:

$$E\{w_i(t)w_j^*(t)\} = \sigma_n^2 \delta_{ij}$$

$$E\{w_i(t)w_j(t)\} = 0 ; i, j = 1, 2, \dots, M_0 \quad (9)$$

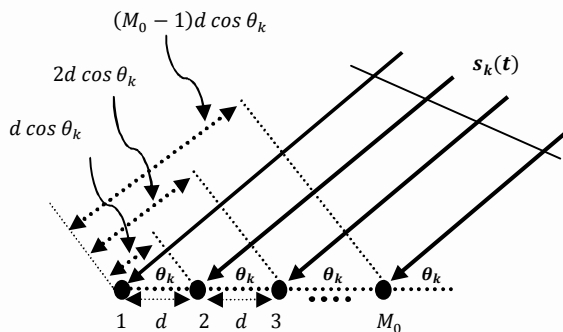
روش زیرفضا (مانند الگوریتم MUSIC [۱]) زوایای سیگنال‌های همبسته تخمین زده می‌شود.

به منظور شبیه‌سازی و مقایسه روش پیشنهادی با FOSS و FBSS، از الگوریتم MUSIC استفاده شده است. طبق نتایج شبیه‌سازی دیده می‌شود که با انتخاب تعداد زیر آرایه‌های کمتر (تعداد عناصر کمتر در آنتن گیرنده) روش ارائه شده کارایی بالاتری نسبت به FOSS و FBSS داشته و برای سیگنال به نویزهای پایین خطای کمتری خواهد داشت.

بخش‌های مختلف مقاله بدین صورت سازماندهی شده است. در بخش ۲ مدل سیگنال و فرضیات، در بخش ۳ معرفی روش زیر فضایی و الگوریتم MUSIC، در بخش ۴ مروری بر دو تکنیک FOSS و FBSS، در بخش ۵ روش پیشنهادی، در بخش ۶ نتایج شبیه‌سازی و در بخش ۷ نتیجه‌گیری می‌باشد.

مدل سیگنال و فرضیات

مطابق شکل ۱ آنتن گیرنده‌ای که متشکل از M_0 عنصر با چیدمان خطی است، K سیگنال باند باریک با فرکانس‌های یکسان f_0 را از جهت‌های مختلف $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K$ دریافت می‌کند. به منظور کاهش تداخل طیف فرکانسی سیگنال‌های دریافتی فاصله بین عناصر $d = \frac{\lambda}{2}$ در نظر گرفته شده است که $\lambda = \frac{c}{f_0}$ طول موج سیگنال‌ها و c سرعت انتشار سیگنال‌ها می‌باشد [۲۰].



شکل ۱. سیگنال‌های دریافتی در عناصر آنتن گیرنده

$s_k(t)$ ، k امین سیگنال مختلط باند باریک بوده و می‌توان آنرا به صورت زیر در نظر گرفت [۲۱]:

$$s_k(t) = u_k(t)e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_k(t))} ; k = 1, 2, \dots, K \quad (1)$$

که $u_k(t)$ و $\varphi_k(t)$ تغییرات کندی نسبت به زمان داشته و به ترتیب دامنه و فاز سیگنال $s_k(t)$ می‌باشند. تغییرات کند نسبت به زمان بدین معنی است که برای هر زمان تاخیر دلخواه τ ، $u_k(t) \approx u_k(t - \tau)$ و $\varphi_k(t) \approx \varphi_k(t - \tau)$ می‌باشد. بنابراین به سادگی می‌توان نشان داد که اثر زمان تاخیر سیگنال k ام در رابطه (۱) به صورت یک تغییر فاز ظاهر خواهد شد یعنی:

$$\sigma(A + \alpha I_n) = \sigma(A) + \alpha \quad (15)$$

۴- به ازای دو بردار $n \times 1$ بعدی دلخواه x و y داریم:

$$\det(A + xy^T) = \det(A) (1 + y^T A^{-1} x) \quad (16)$$

۵- اگر B یک ماتریس دلخواه $n \times m$ و $n > m$ باشد داریم:

$$\lambda = \lambda^* \in \sigma(B^H B) = \begin{cases} > 0 & \text{Rank}(B) = m \\ \geq 0 & \text{Rank}(B) < m \end{cases} \quad (17)$$

۶- بردارهای ویژه متناظر با مقادیر ویژه ماتریس A به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$(A - \lambda I_n) \cdot U_i = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

که U_i بردارهای ویژه ماتریس A است.

حال با توجه به روابط (۱۰) و (۱۲) مقادیر ویژه ماتریس R_Y از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\det(R_Y - \lambda I_{M_0}) = \det(AR_s A^H + (\sigma_n^2 - \lambda) I_{M_0}) = 0 \quad , \quad \lambda \in \sigma(R_Y) \quad (19)$$

برای حالتی که سیگنال‌ها ناهمبسته باشند، همواره $r_{s_{ij}} = 0$ بوده و در نتیجه طبق رابطه (۸) می‌توان نوشت:

$$E\{s_i(t) s_j^*(t)\} = r_{s_i} \delta_{ij} \quad ; \quad i, j = 1, 2, \dots, K \quad (20)$$

بنابراین ماتریس کواریانس R_s به صورت زیر خواهد بود:

$$R_s = E\{s(t) s(t)^H\} = \text{diag}(r_{s1}, r_{s2}, \dots, r_{sK}) \\ = \begin{pmatrix} R_s^{\frac{1}{2}} \\ R_s^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_s^{\frac{1}{2}} \\ R_s^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^H \quad (21)$$

که $R_s^{\frac{1}{2}} = \text{diag}(r_{s1}^{\frac{1}{2}}, r_{s2}^{\frac{1}{2}}, \dots, r_{sK}^{\frac{1}{2}})$ و $\text{diag}(\cdot)$ نماد ماتریس قطری است.

با توجه به روابط (۱۳)، (۱۴) و (۲۰)، رابطه (۱۹) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\det[(\sigma_n^2 - \lambda) I_{M_0} + \begin{pmatrix} AR_s^{\frac{1}{2}} \\ AR_s^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AR_s^{\frac{1}{2}} \\ AR_s^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^H] \quad (22)$$

$$= \det[(\sigma_n^2 - \lambda) I_{M_0}] \cdot \det \left[I_K + \frac{\begin{pmatrix} AR_s^{\frac{1}{2}} \\ AR_s^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^H I_{M_0} \begin{pmatrix} AR_s^{\frac{1}{2}} \\ AR_s^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}}{\sigma_n^2 - \lambda} \right] \\ = (\sigma_n^2 - \lambda)^{M_0} \cdot \det \left[\frac{(\sigma_n^2 - \lambda) I_K + \begin{pmatrix} AR_s^{\frac{1}{2}} \\ AR_s^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} AR_s^{\frac{1}{2}} \\ AR_s^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}}{\sigma_n^2 - \lambda} \right] \\ = (\sigma_n^2 - \lambda)^{M_0 - K} \cdot \det[(\sigma_n^2 - \lambda) I_K + \begin{pmatrix} AR_s^{\frac{1}{2}} \\ AR_s^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} AR_s^{\frac{1}{2}} \\ AR_s^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}] = 0$$

طبق رابطه (۲۲) دیده می‌شود، $M_0 - K$ مقادیر ویژه ماتریس R_Y برابر σ_n^2 و K مقادیر ویژه دیگر از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\det[(\sigma_n^2 - \lambda) I_K + \begin{pmatrix} AR_s^{\frac{1}{2}} \\ AR_s^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} AR_s^{\frac{1}{2}} \\ AR_s^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}] = 0 \quad (23)$$

که σ_n^2 قدرت نویز هر عنصر است.

۴- نویز و سیگنال‌ها ناهمبسته‌اند.

۵- ماتریس A معلوم و رتبه آن برابر K می‌باشد.

از فرضیات و رابطه (۶) ماتریس کواریانس سیگنال‌های دریافتی را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$R_Y = E\{y(t) y(t)^H\} = AR_s A^H + \sigma_n^2 I_{M_0} \quad (10)$$

که I_m و $(\cdot)^H$ به ترتیب ماتریس واحد $m \times m$ و هرمیتین ماتریس و $R_s = E\{s(t) s(t)^H\}$ ماتریس کواریانس سیگنال‌های ارسالی است.

در عمل با نمونه برداری از بردار سیگنال دریافتی $y(t)$ در زمان‌های $t_j = 1, 2, \dots, N$ به صورت زیر تخمین زده شده و براین اساس جهت K سیگنال به دست می‌آید:

$$\hat{R}_Y = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y(t_j) y(t_j)^H \quad (11)$$

در واقع چون محاسبه ماتریس کواریانس R_Y در رابطه (۱۰) نیاز به امید ریاضی دارد، در عمل طبق رابطه (۱۱) از میانگین ریاضی به جای میانگین آماری استفاده شده است.

روش زیر فضا و الگوریتم MUSIC

اساس کار در روش زیر فضا یافتن زیر فضای سیگنال و زیر فضای نویز است. یکی از تکنیک‌هایی که با استفاده از آن می‌توان زیر فضای سیگنال و زیر فضای نویز را به دست آورد، تجزیه کردن ماتریس کواریانس سیگنال‌های دریافتی به مقادیر ویژه و بردارهای ویژه می‌باشد. بنابراین ابتدا با بیان چند رابطه ماتریسی مفید، مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس R_Y در رابطه (۱۰) را محاسبه و سپس با استفاده از آن زیر فضای سیگنال و نویز را برای سیگنال‌های دریافتی همبسته و ناهمبسته به دست می‌آوریم. با فرض این که A یک ماتریس دلخواه $n \times n$ با درمینان غیر صفر باشد، همواره داریم:

۱- مقادیر ویژه ماتریس A مربوط به ریشه‌های معادله مشخصه $P(\lambda)$ بوده و به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0 \quad , \quad \lambda \in \sigma(A) \quad (12)$$

که $\det(\cdot)$ و $\sigma(\cdot)$ به ترتیب درمینان و مقادیر ویژه ماتریس می‌باشند.

۲- اگر C و D دو ماتریس دلخواه $n \times m$ باشند داریم:

$$\det(A + CD^T) = \det(A) \cdot \det(I_n + D^T A^{-1} C) \quad (13)$$

۳- برای یک مقدار اسکالر دلخواه α و ماتریس مربعی n بعدی A روابط زیر همواره برقرار است [۲۲]:

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A) \quad (14)$$

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K$ توسط آنتن گیرنده دریافت می‌شود. در این صورت داریم:

$$s_k(t) = \alpha_k s_1(t) \quad ; \quad \alpha_k \neq 0, k = 1, 2, \dots, K \quad (30)$$

که α_k مقدار مختلط (با دامنه و فاز مشخص) مربوط به ضریب تضعیف مسیر k ام است.

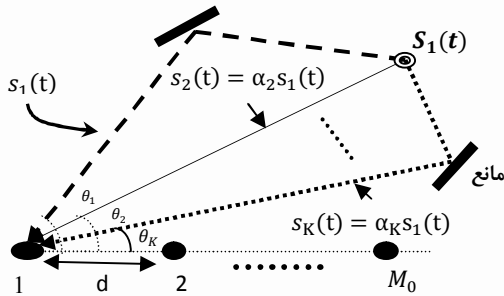
طبق رابطه (۸) واریانس سیگنال‌ها به صورت زیر می‌باشد:

$$E\{s_i(t)s_j^*(t)\} = E\{\alpha_i s_1(t)\alpha_j^* s_1^*(t)\} = \alpha_i \alpha_j^* r_{s_1} \quad (31)$$

$i, j = 1, 2, \dots, K$

اگر برای سادگی $r_{s_1} = E\{s_1(t)s_1^*(t)\} = E\{|s_1(t)|^2\} = 1$ فرض شود ماتریس کواریانس R_s به صورت زیر خواهد شد:

$$R_s = E\{s(t)s(t)^H\} = E\{\alpha s_1(t)s_1^*(t)\alpha^H\} = \alpha\alpha^H \quad (32)$$



شکل ۲. سیگنال دریافتی در عناصر با وجود پدیده چند مسیری

که $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K]^T$ بردار مختلط مربوط به ضرایب تضعیف ناشی از K مسیر است.

در این صورت طبق رابطه (۱۹) و (۳۲) مقادیر ویژه ماتریس R_Y به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\det(AR_s A^H + (\sigma_n^2 - \lambda)I_{M_0}) = \det((\sigma_n^2 - \lambda)I_{M_0} + (A\alpha)(A\alpha)^H) = 0 \quad (33)$$

با استفاده از روابط (۱۶) و (۱۴) رابطه (۳۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\det((\sigma_n^2 - \lambda)I_{M_0}) \left(1 + \frac{(A\alpha)^H(A\alpha)}{\sigma_n^2 - \lambda}\right) = (\sigma_n^2 - \lambda)^{M_0-1} (\sigma_n^2 - \lambda + (A\alpha)^H(A\alpha)) = 0 \quad (34)$$

طبق رابطه (۳۴) دیده می‌شود که $M_0 - 1$ مقادیر ویژه ماتریس R_Y برابر σ_n^2 و مقدار ویژه دیگر بزرگتر از σ_n^2 است یعنی [پیوست ۳]:

$$\lambda_1 = (A\alpha)^H(A\alpha) + \sigma_n^2 = \sum_{j=1}^{M_0} \left| \sum_{i=1}^K \theta_i^{j-1} \alpha_i \right|^2 + \sigma_n^2 > \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_{M_0} = \sigma_n^2 \quad (35)$$

همانطور که در رابطه (۳۵) دیده می‌شود برای K سیگنال همبسته الگوریتم MUSIC کارائی نداشته و فقط جهت یک سیگنال را می‌توان به دست آورد. در واقع در این حالت ماتریس کواریانس R_s

که $\lambda \in \sigma(\sigma_n^2 I_K + (AR_s^{\frac{1}{2}})^H (AR_s^{\frac{1}{2}}))$ بوده و طبق رابطه (۱۵) داریم:

$$\sigma(\sigma_n^2 I_K + (AR_s^{\frac{1}{2}})^H (AR_s^{\frac{1}{2}})) = \sigma\left(\left(AR_s^{\frac{1}{2}}\right)^H \left(AR_s^{\frac{1}{2}}\right)\right) + \sigma_n^2 \quad (24)$$

با توجه به روابط (۲۴) و (۱۷) و این که $\text{Rank}\left(\left(AR_s^{\frac{1}{2}}\right)^H \left(AR_s^{\frac{1}{2}}\right)\right) = K$ می‌باشد [پیوست ۱] می‌توان نتیجه گرفت که K مقادیر ویژه دیگر ماتریس R_Y حقیقی و همواره بزرگتر از σ_n^2 است یعنی داریم:

$$\sigma(R_Y) = \lambda_i = \begin{cases} \sigma_n^2 & i = K + 1, \dots, M_0 \\ > \sigma_n^2 & i = 1, 2, \dots, K \end{cases} \quad (25)$$

بدین ترتیب زیر فضای سیگنال ($1 \leq i \leq K$) و زیر فضای نویز ($i \geq K + 1$) جدا می‌شوند. همچنین طبق رابطه (۲۵) می‌توان تعداد سیگنال‌ها را که برابر تعداد مقادیر ویژه بزرگتر از σ_n^2 است، تخمین زد.

طبق رابطه (۱۸) برای بردارهای ویژه ماتریس R_Y داریم:

$$(R_Y - \lambda I_{M_0}) \cdot U_i = (AR_s A^H + \sigma_n^2 I_{M_0} - \lambda I_{M_0}) \cdot U_i = 0 \quad (26)$$

$i = 1, 2, \dots, M_0$

با توجه به رابطه (۲۵)، برای $\lambda = \sigma_n^2, i \geq K + 1$ بوده و رابطه (۲۶) به صورت زیر خواهد شد:

$$AR_s A^H \cdot U_i = 0 \quad ; \quad i \geq K + 1 \quad (27)$$

با توجه به این که R_s یک ماتریس مثبت می‌باشد داریم [پیوست ۲]:

$$A^H \cdot U_i = a(\theta_i)^H \cdot U_i = 0 \quad ; \quad i \geq K + 1 \quad (28)$$

همانطور که در رابطه (۲۸) دیده می‌شود بردارهای ویژه مربوط به زیر فضای نویز بر بردار $a(\theta_i)$ در زیر فضای سیگنال عمود است. در عمل $a(\theta_i)^H \cdot U_i \approx 0$ بوده و با افزایش تعداد نمونه‌ها در رابطه (۱۱) این تقریب دقیقتر خواهد شد. جهت سیگنال‌ها در الگوریتم MUSIC بر اساس این خاصیت به دست می‌آیند. یعنی جهت K سیگنال، مربوط به K نقطه مینیمم فاصله اقلیدسی $a(\theta)^H \cdot U_n$ و یا از K نقطه ماکزیمم $P(\theta)$ در رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P(\theta) = \frac{1}{d^2} = \frac{1}{\|a(\theta)^H \cdot U_n\|^2} = \frac{1}{a(\theta)^H U_n U_n^H a(\theta)} \quad (29)$$

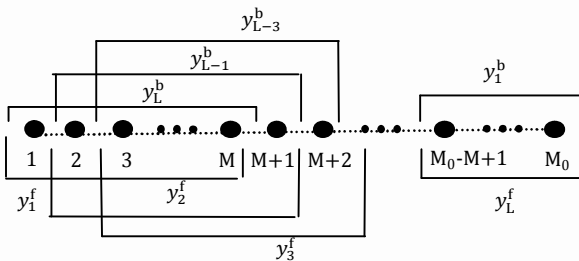
d فاصله اقلیدسی و $U_n = [U_{K+1}, \dots, U_{M_0}]$ بردارهای ویژه زیر فضای نویز و $a(\theta) = [1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{M_0-1}]^T$ است.

برای حالتی که پدیده چند مسیری وجود دارد، سیگنال‌های دریافتی در عناصر همبسته بوده و همواره $r_{s_{ij}} \neq 0$ می‌باشد. به عنوان مثال طبق شکل ۲ سیگنال $s_1(t)$ از K مسیر مختلف

$$\text{Rank}(R_s^f) = \text{Rank}(CC^H) = \text{Rank}(C) = \text{Rank}(DV) \\ = \min(K, L) \quad (41)$$

بنابراین برای $L \leq K$ ماتریس کواریانس R_s^f از مرتبه K بوده و حداقل تعداد عناصر مورد نیاز $M_0 \geq 2K$ می‌باشد [پیوست ۵]. روش کار در FBSS مشابه FOSS است با این تفاوت که در FBSS علاوه بر انتخاب L زیر آرایه رو به جلو در عناصر، L زیر آرایه رو به عقب (که سیگنال هر عنصر در زیر آرایه‌ها، مزدوج حالت رو به جلو است) در نظر گرفته می‌شود (شکل ۴).

در این تکنیک مانند FOSS با محاسبه میانگین ماتریس کواریانس سیگنال‌های دریافتی در $2L$ زیر آرایه، ماتریس کواریانس سیگنال‌های ارسالی از مرتبه کامل شده و می‌توان جهت K سیگنال را به روش زیر فضایی به دست آورد. تعداد زیر آرایه‌ها و عناصر مورد نیاز در این تکنیک نصف FOSS بوده و به ترتیب برابر $M_0 \geq K$ و $L \geq \frac{K}{2}$ می‌باشد.



شکل ۴. انتخاب زیر آرایه‌ها در تکنیک FBSS

روش‌های پیشنهادی

هر چند در FBSS نسبت به FOSS نیاز به عناصر کمتری است، اما علاوه بر افزایش حجم محاسبات همچنان عامل نویز در رابطه (۳۹) وجود داشته و این امر سبب می‌شود که برای سیگنال به نویزهای پایین دقت تخمین چندان مطلوب نباشد. در این بخش دو روش پیشنهاد می‌شود که به ترتیب نسبت به FOSS و FBSS نیاز به عناصر کمتر، محاسبات ساده‌تر و برای سیگنال به نویزهای پایین دقت بالاتری دارند. اساس کار در روش‌های پیشنهادی تقسیم عناصر به L زیر آرایه M عنصری و محاسبه همبستگی بین بردار هر زیر آرایه با یک عنصر خارج از آن می‌باشد. این امر سبب می‌شود، عامل نویز در رابطه (۳۸) حذف و عملیات ضرب نسبت به FOSS و FBSS کاهش یابد. در واقع بنا به فرض ۳ به دلیل این که نویز در عناصر آنتن گیرنده ناهمبسته می‌باشند، همبستگی بین بردار زیر آرایه‌ها و یک عنصر خارج از آن باعث حذف عامل نویز می‌شود. هر چند در عمل حذف کامل نویز امکان پذیر نیست، اما با استفاده از این روش می‌توان اثر نویز را به طرز چشمگیری کاهش داد. از طرفی برای محاسبه همبستگی بین یک بردار و یک عنصر تنها نیاز به M عملیات ضرب است در حالی که در FBSS و FOSS برای محاسبه همبستگی بین دو بردار نیاز به M^2 عملیات ضرب

در رابطه (۳۲) از مرتبه کامل نبوده و $\text{Rank}(R_s) = 1$ می‌باشد [پیوست ۴]. به منظور رفع این مشکل روش‌های زیادی ارائه شده است که با استفاده از آنها ماتریس R_s از مرتبه کامل (K برابر K) می‌شود [۱۸-۱۲]. یکی از روش‌های معروف و پر کاربرد تکنیک FOSS و FBSS می‌باشد که در بخش بعدی مروری بر آن شده است.

تکنیک FOSS و FBSS

در تکنیک FOSS طبق شکل ۳ عناصر به L زیر آرایه M عنصری رو به جلو تقسیم شده و با میانگین‌گیری ماتریس کواریانس سیگنال‌های دریافتی در L زیر آرایه، ماتریس کواریانس سیگنال‌های ارسالی مرتبه کامل می‌شود.

اگر y_i^f بردار سیگنال دریافتی زیر آرایه i ام باشد، داریم [۱۲]:

$$y_i^f = AD^{i-1}s(t) + w_i^f(t) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (36)$$

که

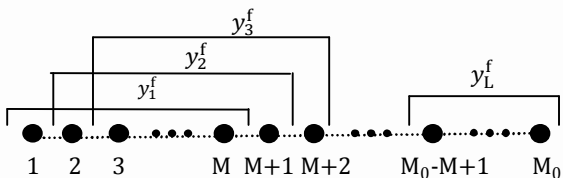
$$D = \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K) \quad (37)$$

$$w_i^f(t) = [w_i(t), w_{i+1}(t), \dots, w_{i+M-1}(t)]^T \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, L$$

و A طبق رابطه (۶) برای M عنصر تعریف می‌شود. بنابراین ماتریس کواریانس زیر آرایه i ام به صورت زیر خواهد شد:

$$R_i^f = E\{y_i^f y_i^{fH}\} = (AD^{i-1})R_s(AD^{i-1})^H + \sigma_n^2 I_M \quad (38)$$

$i = 1, 2, \dots, L$



شکل ۳. انتخاب زیر آرایه‌ها در تکنیک FOSS

اگر میانگین R_i^f ها در L زیر آرایه باشد، داریم:

$$R = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L R_i^f = AR_s^f A^H + \sigma_n^2 I_M \quad (39)$$

با استفاده از روابط (۳۲) و (۳۹) برای سیگنال‌های همبسته ماتریس کواریانس R_s^f به صورت زیر خواهد بود:

$$R_s^f = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (D^{i-1})R_s(D^{i-1})^H = \frac{1}{L} C C^H \quad (40)$$

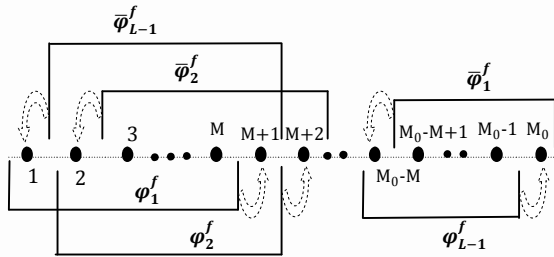
که

$$C = [\alpha, D\alpha, D^2\alpha, \dots, D^{L-1}\alpha] \\ = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha_{K-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \theta_1 & \dots & \theta_1^{L-1} \\ 1 & \theta_2 & \dots & \theta_2^{L-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \theta_K & \dots & \theta_K^{L-1} \end{bmatrix} = DV$$

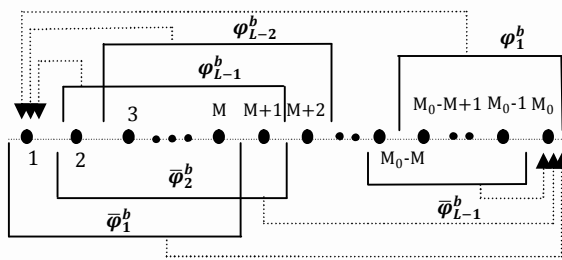
در مرجع [۲۲] نشان داده شده است که مرتبه ماتریس R_s^f به صورت زیر می‌باشد:

$$= AD^{L-i+1-M_0} \alpha^* \alpha^T (D^{M_0-1}) I_{K \times 1} + 0I, \quad 1 \leq i \leq L-1$$

همانطور که در روابط (۴۵) تا (۴۸) دیده می‌شود با محاسبه همبستگی بین بردار زیر آرایه‌ها و یک عنصر خارج از آنها عامل نویز حذف و نیاز به تنها M عمل ضرب در هر بردار همبستگی است. در حالیکه طبق رابطه (۳۸) در FOSS برای محاسبه ماتریس کواریانس در هر زیر آرایه نیاز به M^2 عمل ضرب می‌باشد. هر چند در عمل به دلیل تعداد نمونه‌های محدود در یک بازه زمانی، اثر نویز همواره وجود دارد و نمی‌توان آنرا به طور کلی حذف کرد ولی با استفاده از این روش می‌توان تا حد زیادی اثر آن را کاهش داد.



شکل ۵. بردارهای همبستگی Φ_i^f و $\bar{\Phi}_i^f$ در الگوریتم پیشنهادی



شکل ۶. بردارهای همبستگی Φ_i^b و $\bar{\Phi}_i^b$ در الگوریتم پیشنهادی

حال با استفاده از بردارهای به دست آمده از روابط (۴۵) تا (۴۸) ماتریس Φ_i را طوری تعریف می‌کنیم که فرم ماتریس کواریانس در رابطه (۳۸) داشته باشد. برای این منظور رابطه زیر پیشنهاد می‌شود:

$$\Phi_i \triangleq \frac{\Phi_i^f \Phi_i^{fH} + \Phi_i^b \Phi_i^{bH}}{2} = AR^i A^H + 0I_{M \times M}; \quad 1 \leq i \leq L-1$$

که ماتریس R^i به صورت زیر می‌باشد.

$$R^i = \frac{1}{2} [D^{i-1} \alpha \alpha^H (D^{M+i-1})^* I_{K \times K} (D^{-M_0+M+i})^H \alpha \alpha^H (D^{L-i})^H + D^{i-M_0} \alpha^* \alpha^T I_{K \times K} (D^{M_0-1})^H \alpha \alpha^T (D^{L-i-M_0+1})^H]$$

به دلیل اینکه ماتریس R^i در رابطه (۵۰) لزوماً از مرتبه کامل نیست، ماتریس کواریانس Φ_i در رابطه (۴۹) نیز لزوماً مرتبه کامل نبوده و در نتیجه برای تخمین زوایای سیگنال‌ها به روش زیر فضا

می‌باشد. از طرفی برای این که تعداد عناصر مورد نیاز در روش‌های پیشنهادی نسبت به FBSS و FOSS کمتر شود، با استفاده از بردارهای همبستگی به دست آمده از زیر آرایه‌ها، یک ماتریس جدید تعریف می‌کنیم به طوری که این ماتریس فرم ماتریس کواریانس در رابطه (۳۹) را داشته و با تعداد عناصر کمتری مرتبه آن برابر K شود.

روش پیشنهادی ۱

طبق روابط (۵) و (۳۰) وقتی سیگنال‌ها همبسته‌اند $y_i(t)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت [پیوست ۶].

$$y_i(t) = s_1(t) \alpha^T D^{i-1} I_{K \times 1} + w_i(t) = I_{K \times 1}^T D^{i-1} \alpha s_1(t) + w_i(t); \quad i = 1, 2, \dots, M_0 \quad (42)$$

که $I_{K \times 1}$ بردار واحد $K \times 1$ می‌باشد. بنابراین برای بردار زیر آرایه نام رو به جلو و رو به عقب داریم [پیوست ۷]:

$$y_i^f = AD^{i-1} \alpha s_1(t) + w_i^f(t) \quad (43)$$

$$y_i^b = AD^{i-M_0} \alpha^* s_1^*(t) + w_i^b(t); \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (44)$$

که y_i^b و y_i^f به ترتیب بردار زیر آرایه نام رو به جلو و رو به عقب، $w_i^b(t) = [w_{M_0-i+1}^*(t), w_{M_0-i}^*(t), \dots, w_{L-i+1}^*(t)]^T$ و $w_i^f(t)$ طبق رابطه (۶) برای M عنصر تعریف می‌شود.

اگر طبق شکل ۵ همبستگی بین بردار زیر آرایه نام رو به جلو و رو به عقب با عنصر جلویی و عنصر عقبی را به ترتیب با Φ_i^f و $\bar{\Phi}_i^f$ نشان دهیم داریم:

$$\begin{aligned} \Phi_i^f &= E[y_i^f y_{M+i}^{*f}(t)] \\ &= E[(AD^{i-1} \alpha s_1(t) + w_i^f(t)) (s_1(t) \alpha^T D^{M+i-1} I_{K \times 1} + w_{M+i}^{*f}(t))] \\ &= AD^{i-1} \alpha \alpha^H (D^{M+i-1})^* I_{K \times 1} + 0I, \quad 1 \leq i \leq L-1 \end{aligned} \quad (45)$$

$$(46)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_i^f &= E[y_{L-i+1}^f y_{M_0-M+1-i}^{*f}(t)] = E[(AD^{L-i} \alpha s_1(t) + w_{L-i+1}^f(t)) (s_1(t) \alpha^T D^{M_0-M-i} I_{K \times 1} + w_{M_0-M+1-i}^{*f}(t))] \\ &= AD^{L-i} \alpha \alpha^H (D^{M_0-M-i})^* I_{K \times 1} + 0I, \quad 1 \leq i \leq L-1 \end{aligned}$$

طبق شکل ۶ همبستگی بین بردار زیر آرایه نام رو به عقب و رو به جلو با عنصر اول و عنصر آخر را به ترتیب با Φ_i^b و $\bar{\Phi}_i^b$ نشان داده و داریم:

$$\begin{aligned} \Phi_i^b &= E[y_i^b y_1(t)] = \\ &= E[(AD^{i-M_0} \alpha^* s_1^*(t) + w_i^b(t)) (s_1(t) \alpha^T I_{K \times 1} + w_1(t))] \\ &= AD^{i-M_0} \alpha^* \alpha^T I_{K \times 1} + 0I \quad 1 \leq i \leq L-1 \end{aligned} \quad (47)$$

$$(48)$$

$$\bar{\Phi}_i^b = E[y_{L-i+1}^b y_{M_0}(t)] = E[(AD^{L-i+1-M_0} \alpha^* s_1^*(t) + w_{L-i+1}^b(t)) (s_1(t) \alpha^T D^{M_0-1} I_{K \times 1} + w_{M_0}(t))]$$

مزدوج جابه‌جایی سطر و ستون‌های آن است. به دلیل این که مرتبه ماتریس Ψ در رابطه (۵۱) (طبق شرط ذکر شده در رابطه (۵۵)) برابر K می‌باشد، مزدوج و جابه‌جایی سطر و ستون آن نقشی در تغییر مرتبه نداشته و برای $K \leq 2(L-1)$ دارای مرتبه K می‌باشد. بنابراین ماتریس پیشنهادی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Phi \triangleq \frac{\Psi + J_M \Psi^* J_M}{2} \quad (57)$$

که

$$J_M = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{M \times M}$$

طبق رابطه (۵۱) و (۵۷) و اینکه $J_M A^* = A D^{1-M}$ می‌باشد، داریم:

$$\Phi = \frac{AR_s A^H + J_M (A^* R_s^* A^H) J_M}{2} = \frac{A(R_s + D^{1-M} R_s^* D^{M-1}) A^H}{2} = A R A^H \quad (58)$$

که طبق روابط (۵۲) و (۵۸) ماتریس R به صورت زیر خواهد بود:

$$R = \frac{1}{2} (R_s + D^{1-M} R_s^* D^{M-1}) = \frac{1}{4(L-1)} \left(\sum_{i=1}^{L-1} H_i^f [C_i C_i^H] + H_i^b [D_i D_i^H] + V_i^f [C_i^* (D^{1-M} C_i^*)^H] + V_i^b [D_i^* D_i^H] \right) \quad (59)$$

که $V_i^b = D^{1-M} H_i^{b*}$ و $V_i^f = D^{1-M} H_i^{f*}$ و دو ماتریس F و G به صورت زیر می‌باشند.

$$F = [H_1^f C_1, \dots, H_{L-1}^f C_{L-1} ; H_1^b D_1, \dots, H_{L-1}^b D_{L-1} ; V_1^f C_1^*, \dots, V_{L-1}^f C_{L-1}^* ; V_1^b D_1^*, \dots, V_{L-1}^b D_{L-1}^*]_{K \times 4(L-1)}$$

$$G = [C_1, \dots, C_{L-1} ; D_1, \dots, D_{L-1} ; D^{1-M} C_1^*, \dots, D^{1-M} C_{L-1}^* ; D^{1-M} D_1^*, \dots, D^{1-M} D_{L-1}^*]_{4(L-1) \times K}$$

با توجه به این که F و G به ترتیب دو ماتریس $K \times 4(L-1)$ و $4(L-1) \times K$ می‌باشند، داریم:

$$\text{rank}(F) = \text{rank}(G) = \text{rank}(FG) = \text{rank}(R) = \min(K, 4(L-1)) \quad (60)$$

بنابراین طبق رابطه (۶۰) برای $K \leq 4(L-1)$ مرتبه ماتریس Φ برابر K شده و در نتیجه می‌توان جهت K سیگنال همبسته را با روش زیر فضا به دست آورد. همچنین پیداست (با استفاده از رابطه (۵۶)) در این روش حداقل تعداد زیرآرایه‌ها و عناصر مورد نیاز در آنتن گیرنده به ترتیب برابر $L_{\min} = \frac{K}{4} + 1$ و $M_{0\min} = \frac{5K}{4} + 1$ می‌باشد.

مفید نخواهد بود [پیوست ۸]. به منظور رفع این مشکل میانگین ماتریس کواریانس Φ_i را در $L-1$ زیرآرایه به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$\Psi = \frac{\sum_{i=1}^{L-1} \Phi_i}{L-1} = A \left(\frac{\sum_{i=1}^{L-1} R_i}{L-1} \right) A^H = A R_s A^H \quad (61)$$

که Ψ میانگین ماتریس کواریانس Φ_i و R_s به صورت زیر می‌باشد:

$$R_s = \frac{\sum_{i=1}^{L-1} R_i}{L-1} = \frac{1}{2(L-1)} \sum_{i=1}^{L-1} r_i^f [D^{i-1} \alpha \alpha^H (D^{L-i})^H] + r_i^b [D^{i-M_0} \alpha^* \alpha^{*T} (D^{L-i-M_0+1})^H] = \frac{1}{2(L-1)} \sum_{i=1}^{L-1} H_i^f [(D^{L-i} \alpha) (D^{L-i} \alpha)^H] + H_i^b [(D^{L-i-M_0+1} \alpha^*) (D^{L-i-M_0+1} \alpha^*)^H] = \frac{1}{2(L-1)} \sum_{i=1}^{L-1} H_i^f [C_i C_i^H] + H_i^b [D_i D_i^H] = \frac{PQ}{2(L-1)} \quad (62)$$

که دو ماتریس P و Q به صورت زیر می‌باشند.

$$P = [H_1^f C_1, \dots, H_{L-1}^f C_{L-1} ; H_1^b D_1, \dots, H_{L-1}^b D_{L-1}] \quad (63)$$

$$Q = [C_1, \dots, C_{L-1} ; D_1, \dots, D_{L-1}]^H \quad (64)$$

$$C_i = D^{L-i} \alpha, \quad H_i^b = r_i^b D^{2i-L-1}, \quad H_i^f = r_i^f D^{2i-1-L}$$

$D_i = D^{L-i-M_0+1} \alpha^*$ و همچنین

$$r_i^b = \alpha^H D^{1-M-i} I_{K \times K} (D^{i+M-M_0})^H \alpha$$

$\alpha^T I_{K \times K} (D^{M_0-1})^H \alpha$ تعریف شده است.

با توجه به رابطه (۵۲) مرتبه ماتریس R_s به صورت زیر به دست می‌آید [پیوست ۹]:

$$\text{Rank}(R_s) = \text{Rank}(PQ) = \text{Rank}(P) = \text{Rank}(Q) = \min(K, 2(L-1)) \quad (65)$$

بنابراین طبق رابطه (۵۵) برای $K \leq 2(L-1)$ یا $L \geq \frac{K}{2} + 1$ مرتبه ماتریس R_s برابر K بوده و می‌توان با روش زیر فضا جهت K سیگنال همبسته را تخمین زد. این بدین معنی است که در این روش حداقل تعداد زیر آرایه‌های انتخابی $L_{\min} = \frac{K}{2} + 1$ است. همچنین با توجه به این که $L = M_0 - M + 1$ و $M_{\min} = K + 1$ می‌باشد برای حداقل تعداد عناصر داریم:

$$M_{0\min} = L_{\min} + M_{\min} - 1 = \left(\frac{K}{2} + 1 \right) + (K + 1) - 1 = \frac{3K}{2} + 1 \quad (66)$$

روش پیشنهادی ۲

در این بخش روش دیگری را پیشنهاد می‌دهیم که نسبت به FBSS و روش پیشنهادی اول به عناصر و زیر آرایه کمتری نیاز داشته و برای سیگنال به نویزهای پایین دقت بالاتری دارد. در این روش یک ماتریس جدید را به گونه ای تعریف می‌کنیم که همچنان به فرم رابطه (۳۸) بوده و مرتبه آن با تعداد عناصر کمتری نسبت به روش پیشنهادی اول و FBSS برابر K است. ماتریس پیشنهادی بر اساس مجموع ماتریس Ψ در رابطه (۵۱) و

نتایج شبیه سازی

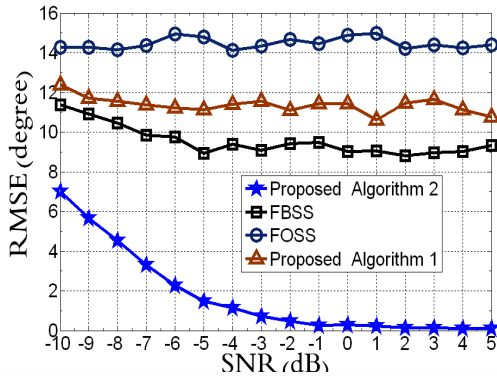
در این بخش به کمک نرم افزار MATLAB خطای ناشی از تخمین زوایا در روش‌های پیشنهادی با FBSS و FOSS برای سیگنال به نویز و تعداد زیر آرایه‌های مختلف مقایسه شده است. در تمام مثال‌ها، $N=400$ و خطا با معیار مجذور مربعات خطا به صورت زیر تعریف شده است:

$$RMSE \triangleq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^K (\hat{\theta}_i - \theta_i)^2}{K}} \quad (61)$$

که θ_1 و $\hat{\theta}_1$ به ترتیب زاویه و تخمین زاویه سیگنال نام و RMSE مجذور مربعات خطا می‌باشد.

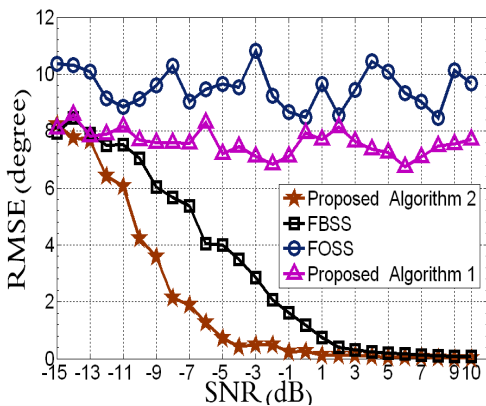
فاصله بین عناصر $d = 0.5$ بوده و آنتن گیرنده هشت سیگنال همبسته با زوایای 20° و 40° و 60° و 80° و 100° و 120° و 140° و 160° $\alpha_1=1, \alpha_2=0.4+0.8j, \alpha_3=0.5-0.7j, \alpha_4=0.5+0.6j, \alpha_5=-0.3+0.8j, \alpha_6=0.2+0.6j, \alpha_7=-0.1+0.4j, \alpha_8=0.7-0.3j$ دریافت می‌کند. همچنین تعداد عناصر در هر زیر آرایه $M = 9$ فرض شده است.

شکل ۷ خطای ناشی از تخمین زوایا را در دو روش پیشنهادی و دو تکنیک FOSS و FBSS بر حسب تعداد زیر آرایه‌های مختلف با فرض $SNR = 10$ dB نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود با انتخاب $L_{min} = \frac{K}{4} + 1 = 3$ زیر آرایه در عناصر، خطای تخمین زوایا در روش پیشنهادی ۲ تقریباً صفر شده و نسبت به روش‌های دیگر کارایی بالاتری دارد. همچنین پیداست که روش پیشنهادی ۱ و دو تکنیک FBSS و FOSS به ترتیب برای $L_{min} = \frac{K}{2} = 4, L_{min} = \frac{K}{2} + 1 = 5$ مفید خواهند بود...



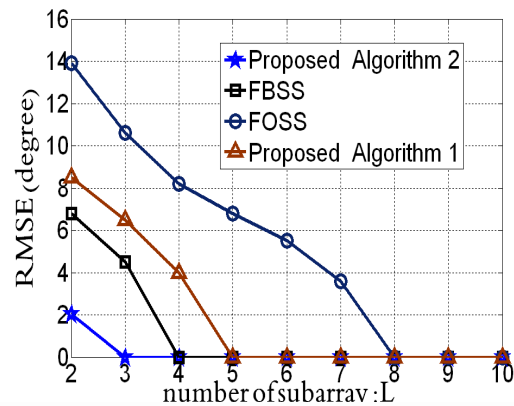
شکل ۸. خطای ناشی از تخمین زوایا در روش‌های پیشنهادی، FOSS و FBSS بر حسب SNR با انتخاب $L=3$

شکل (۹) مربوط به خطای ناشی از تخمین زوایا در چهار روش با در نظر گرفتن $L=4$ می‌باشد. همانطور که انتظار می‌رود بر خلاف روش پیشنهادی ۲ و FBSS که مرتبه ماتریس کواریانس سیگنال‌های ارسال آنها کامل می‌باشد، روش پیشنهادی ۱ و FOSS کارایی نخواهند داشت. همچنین پیداست که در این حالت برای SNR های مختلف خطا در روش پیشنهادی ۲ نسبت به FBSS کمتر می‌باشد



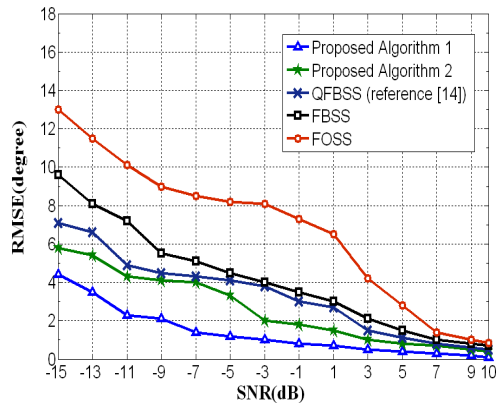
شکل ۹. خطای ناشی از تخمین زوایا در روش‌های پیشنهادی، FOSS و FBSS بر حسب SNR با انتخاب $L=4$

شکل ۱۰ مربوط به مقایسه چهار روش برای SNR های مختلف با در نظر گرفتن $L=5$ زیر آرایه می‌باشد. همانطور که در شکل ۱۰ دیده می‌شود در این حالت با افزایش SNR تمام نمودارها به جز نمودار خطای FOSS سیر نزولی دارند. زیرا در این حالت طبق رابطه (۴۱) ماتریس کواریانس R_s در FOSS از مرتبه کامل نبوده و در نتیجه برای تخمین جهت سیگنال‌های همبسته مفید نیستند.



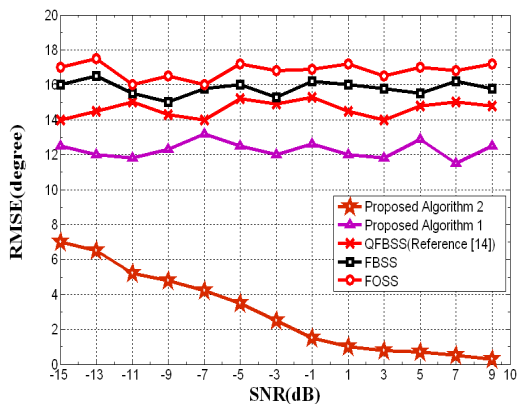
شکل ۷. خطای ناشی از تخمین زوایا در روش‌های پیشنهادی، FOSS و FBSS بر حسب تعداد زیر آرایه‌های مختلف عناصر با $SNR = 10$ dB

در شکل ۸ خطای تخمین در چهار روش برای SNR های مختلف با در نظر گرفتن سه زیر آرایه در عناصر، نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۸ دیده می‌شود، با افزایش SNR نمودار خطای روش پیشنهادی ۲ بر خلاف دیگر روش‌ها سیر نزولی داشته و حتی برای SNR های بالا روش‌های دیگر کارایی ندارند. چرا که در این حالت رتبه ماتریس کواریانس R_s کمتر از K می‌باشد.



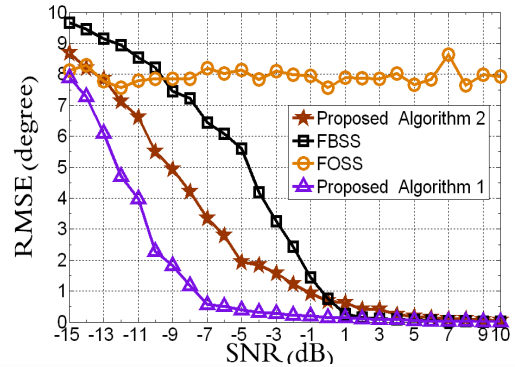
شکل ۱۲. خطای ناشی از تخمین زوایا در روش‌های پیشنهادی، FOSS و QFBSS و FBSS برحسب SNR با انتخاب $L=8$

در شکل ۱۳ خطای تخمین در پنج روش برای SNR های مختلف با در نظر گرفتن سه زیر آرایه در عناصر، نشان داده شده است. طبق شکل ۱۳ دیده می‌شود که با افزایش SNR نمودار روش پیشنهادی ۲ برخلاف دیگر روش‌ها سیر نزولی دارد. چرا که در این حالت رتبه ماتریس کواریانس R_s کمتر از K می‌باشد. همچنین دیده می‌شود که در این حالت روش ارائه شده در مرجع [14] کارایی خود را از دست داده و برای تخمین زوایای سیگنال‌ها مفید واقع نمی‌شود.



شکل ۱۳. خطای ناشی از تخمین زوایا در روش‌های پیشنهادی، FOSS و QFBSS و FBSS برحسب SNR با انتخاب $L=3$

جدول ۱ مربوط به مقایسه پنج روش بررسی شده، با فرض وجود هشت سیگنال ارسالی همبسته و در نظر گرفتن $L=8$ زیر آرایه می‌باشد. همانطور که در جدول ۱ دیده می‌شود الگوریتم‌های پیشنهادی نیاز به تعداد عملیات ضرب کمتری در محاسبات نسبت به دیگر الگوریتم‌های بررسی شده داشته‌اند واز نظر کارایی در سطح بالاتری قرار دارند.



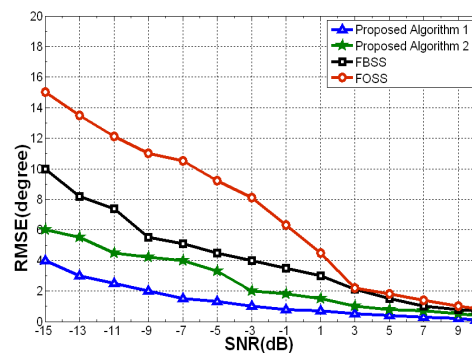
شکل ۱۰. خطای ناشی از تخمین زوایا در روش‌های پیشنهادی، FOSS و FBSS برحسب SNR با انتخاب $L=5$

در شکل ۱۱ خطای تخمین در چهار روش برای SNR های مختلف با در نظر گرفتن هشت زیر آرایه در عناصر آنتن گیرنده، نشان داده شده است. در این مثال فرض شده است که از هشت سیگنال ارسالی سه سیگنال S_3, S_2, S_1 ناهمبسته و پنج سیگنال دیگر به صورت:

$$S_7 = \alpha_7 S_3, \quad S_6 = \alpha_6 S_2 \quad \text{و} \quad S_5 = \alpha_5 S_1, \quad S_4 = \alpha_4 S_1$$

$$S_8 = \alpha_8 S_3$$

به ترتیب بازوای $20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 120^\circ, 140^\circ$ و 160° با سه سیگنال فوق همبسته می‌باشند. همانطور که در شکل ۱۱ دیده می‌شود، با افزایش SNR روش‌های پیشنهادی نسبت به دو تکنیک FOSS و FBSS کارایی بالاتری دارند.



شکل ۱۱. خطای ناشی از تخمین زوایا برای ترکیبی از هشت سیگنال همبسته و ناهمبسته برحسب SNR با انتخاب $L=8$

شکل ۱۲ مربوط به مقایسه پنج روش با فرض هشت سیگنال ارسالی همبسته برای SNR های مختلف با در نظر گرفتن $L=8$ زیر آرایه می‌باشد. همانطور که در شکل ۱۲ دیده می‌شود در این حالت با افزایش SNR تمام نمودارها سیر نزولی دارند. زیرا در این حالت شرط لازم و کافی برای کامل بودن رتبه ماتریس کواریانس رعایت شده است. همچنین دیده می‌شود همواره خطای ناشی از تخمین زوایا در دو روش پیشنهادی نسبت به روش ارائه شده در مرجع [14] کمتر است.

$$X^T R_S X = \sum_{i=1}^K x_i^2 r_{si} > 0$$

پیوست ۳

$$A\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ v_1 & v_2 & \dots & v_K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{M_0-1} & v_2^{M_0-1} & \dots & v_K^{M_0-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^K \alpha_i \\ \sum_{i=1}^K \theta_i \alpha_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^K \theta_i^{M_0-1} \alpha_i \end{bmatrix}$$

$$(A\alpha)^H (A\alpha) + \sigma_n^2 =$$

$$\left[\left(\sum_{i=1}^K \alpha_i \right)^* \dots \left(\sum_{i=1}^K \theta_i^{M_0-1} \alpha_i \right)^* \right] \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^K \alpha_i \\ \sum_{i=1}^K \theta_i \alpha_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^K \theta_i^{M_0-1} \alpha_i \end{bmatrix} + \sigma_n^2 =$$

$$\sum_{j=1}^{M_0} \left| \sum_{i=1}^K \theta_i^{j-1} \alpha_i \right|^2 + \sigma_n^2$$

پیوست ۴

$$\alpha \alpha^H = \begin{bmatrix} \alpha_1 \alpha_1^* & \alpha_1 \alpha_2^* & \dots & \alpha_1 \alpha_K^* \\ \alpha_2 \alpha_1^* & \alpha_2 \alpha_2^* & \dots & \alpha_2 \alpha_K^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_K \alpha_1^* & \alpha_K \alpha_2^* & \dots & \alpha_K \alpha_K^* \end{bmatrix}$$

پیداست که همواره داریم:

$$\det(\alpha_1 \alpha_1^*) = |\alpha_1|^2 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_1^* & \alpha_1 \alpha_2^* \\ \alpha_2 \alpha_1^* & \alpha_2 \alpha_2^* \end{pmatrix} = 0,$$

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_1^* & \alpha_1 \alpha_2^* & \alpha_1 \alpha_3^* \\ \alpha_2 \alpha_1^* & \alpha_2 \alpha_2^* & \alpha_2 \alpha_3^* \\ \alpha_3 \alpha_1^* & \alpha_3 \alpha_2^* & \alpha_3 \alpha_3^* \end{pmatrix} = 0, \dots, \det(\alpha \alpha^H) = 0$$

یعنی دتر مینان $\alpha \alpha^H$ فقط با حذف $K-1$ سطر و ستون همواره غیر صفر می‌باشد و این بدین معنی است که $\text{Rank}(\alpha \alpha^H) = 1$ است.

پیوست ۵

با توجه به این که $L = M_0 - M + 1$ و $M = K + 1$ می‌باشد می‌توان نوشت:

$$K \leq L = M_0 - M + 1 = M_0 - (K + 1) + 1 = M_0 - K \Rightarrow M_0 \geq 2K$$

پیوست ۶

$$y_1(t) = x_1(t) + w_1(t) = \left(\sum_{k=1}^K s_k(t) e^{-j2\pi f_0 \tau_k (\theta_k)} \right) + w_1(t) \\ = \left(\sum_{k=1}^K v_k^{i-1} \alpha_k s_1(t) \right) + w_1(t)$$

$$= [v_1^{i-1}, \dots, v_K^{i-1}] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_K \end{bmatrix} s_1(t) + w_1(t) = s_1(t) [\alpha_1, \dots, \alpha_K] \begin{bmatrix} v_1^{i-1} \\ \vdots \\ v_K^{i-1} \end{bmatrix} +$$

$$w_1(t) = s_1(t) [\alpha_1, \dots, \alpha_K] \begin{bmatrix} v_1^{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & v_K^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} +$$

$$+ w_1(t) = s_1(t) \alpha^T D^{i-1} I_{K \times 1} + w_1(t) = I_{K \times 1}^T D^{i-1} \alpha s_1(t) + w_1(t)$$

پیوست ۷

$$y_f^T = \begin{bmatrix} y_i(t) \\ y_{i+1}(t) \\ \vdots \\ y_{i+M-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1(t) \alpha^T D^{i-1} I_{K \times 1} + w_i(n) \\ s_1(t) \alpha^T D^i I_{K \times 1} + w_{i+1}(n) \\ \vdots \\ s_1(t) \alpha^T D^{i+M-2} I_{K \times 1} + w_{i+M-1}(n) \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} I_{1 \times K} D^{i-1} \alpha s_1(t) + w_i(t) \\ I_{1 \times K} D^i \alpha s_1(t) + w_{i+1}(t) \\ \vdots \\ I_{1 \times K} D^{i+M-2} \alpha s_1(t) + w_{i+M-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1 \times K} D^{i-1} \alpha s_1(t) \\ I_{1 \times K} D^i \alpha s_1(t) \\ \vdots \\ I_{1 \times K} D^{i+M-2} \alpha s_1(t) \end{bmatrix} +$$

جدول ۱. مقایسه الگوریتم‌های بررسی شده از نظر کارایی با معیار RMSE

با در نظر گرفتن $M=9$ و $N=400$ و $K=8$

الگوریتم	L=2	L=3	L=4	L=5	L=8	تعداد ضرب لازم در محاسبات
الگوریتم پیشنهادی ۱	کارایی ندارد	کارایی ندارد	کارایی ندارد	خیلی قوی	خیلی قوی	$M * (K/2 + 1)$
الگوریتم پیشنهادی ۲	کارایی ندارد	خیلی قوی	خیلی قوی	قوی	قوی	$M * (K/4 + 1)$
QBSS	کارایی ندارد	کارایی ندارد	خوب	خوب	خوب	$M^2 * (K + 1)$
FBSS	کارایی ندارد	کارایی ندارد	کارایی ندارد	متوسط	متوسط	$M^2 * (K + 1)$
FOSS	کارایی ندارد	کارایی ندارد	کارایی ندارد	کارایی ندارد	متوسط	$M^2 * (2K + 1)$

نتیجه گیری

در این مقاله دو روش برای تخمین جهت K سیگنال باند باریک همبسته و ناهمبسته ارائه گردید. همانطور که مشاهده شد در دو روش پیشنهادی بر خلاف FOSS و FBSS که به ترتیب نیاز به حداقل $2K$ و $\frac{3K}{2} + 1$ عنصر در آنتن گیرنده است، نیاز به $1 + \frac{5K}{4}$ عنصر می‌باشد. همچنین دیده شد که در دو روش پیشنهادی برای محاسبه بردار همبستگی بین سیگنال دریافتی زیر آرایه‌ها و یک عنصر خارج از آن تنها نیاز به $M * (K/4 + 1)$ و $M * (K/2 + 1)$ عمل ضرب می‌باشند، در حالی که در FBSS و FOSS به منظور محاسبه همبستگی بین دو بردار به ترتیب نیاز به $M^2 * (K + 1)$ و $M^2 * (2K + 1)$ عملیات ضرب است. طبق نتایج به دست آمده از نرم افزار MATLAB برای سیگنال به نویزهای پایین و انتخاب زیر آرایه‌های لازم در عناصر، خطای ناشی از تخمین زوایا در دو روش پیشنهادی همواره کمتر از FBSS و FOSS است.

پیوست‌ها

پیوست ۱

$$\text{Rank} \left(\left(AR_s^{\frac{1}{2}} \right)^H \left(AR_s^{\frac{1}{2}} \right) \right) = \text{Rank} \left(\left(AR_s^{\frac{1}{2}} \right) \left(AR_s^{\frac{1}{2}} \right)^H \right)$$

$$= \text{Rank} \left(AR_s^{\frac{1}{2}} R_s^{\frac{1}{2}H} A^H \right) = \text{Rank}(AR_s A^H)$$

با توجه به این که $R_s = \text{diag}(r_{s1}, r_{s2}, \dots, r_{sK})$ و $\text{Rank}(A) = \text{Rank}(R_s) = K$ می‌باشد داریم:

$$\text{Rank}(AR_s A^H) = K$$

پیوست ۲

با توجه به این که $E\{s_i(t)s_i^*(t)\} = E\{|s_i(t)|^2\} = r_{s_i} > 0$ می‌باشد برای هر بردار دلخواه $X = [x_1, \dots, x_K]^T$ داریم:

Pseudo-Spectrum for MUSIC", ICTC, 2011, pp. 125-126.

[4] Roy, R. Kailath, "ESPRIT – Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques", IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Process., 1989, pp. 984–995.

[5] S. Marcos, A. Marsal, "The propagator method for source bearing estimation", Signal Processing, 1995, vol. 42, pp. 121-138.

[6] A. Barbell, "Improving the resolution performance of eigenstructure based direction-finding algorithm", in Proc. Int. Conf. Acoust, Speech, Signal Process, 1983, pp. 336–339.

[7] Z. D. Bai, P. Krishnaih, and L. Zhao, "On rates of convergence of efficient detection criteria in signal processing with white noise", IEEE Trans. Int. Theory, 1989, vol. 35, no. 2, pp. 380–388.

[8] Z. M. Liu, Z. T. Huang, Y. Y. Zhou, "Computationally efficient direction finding using uniform linear arrays", IET Radar Sonar Navig, 2012, vol. 6, Iss. 1, pp. 39-48.

[9] S. Sh. Moghaddam, F. Akbari, "Efficient Narrowband Direction of Arrival Estimation Based on a Combination of Uniform Linear/Shirvani-Akbari Arrays", International Journal of Antennas and Propagation, Article ID 280845, 2012, pp. 1-10.

[10] T. B. LAVATE, Prof. V. K. KOKATE, Prof. Dr. A. M. SAPKAL, "Performance Analysis of MUSIC and ESPRIT DOA Estimation algorithms for adaptive array smart antenna in mobile communication", Second International Conference on Computer and Network Technology (ICCNT), IEEE 2010, pp. 308-311.

[11] A. Vesa, "Direction of Arrival Estimation using MUSIC and Root-MUSIC Algorithm", 18th Telecommunications forum (TELFOR), 2010, pp. 23-25.

[12] S. U. Pillai and B. H.Kwon, "Forward/backward spatial smoothing techniques for coherent signals identification," IEEE Trans. Acoust, Speech, Signal Processing, 1989, vol. 37, pp. 8–15.

[13] J. S. Thompson, P. M. Grant, B. Mulgrew, "Performance of Spatial Smoothing Algorithms for Correlated Sources", IEEE Transaction on Signal Processing, 1996, vol. 44, no. 4, pp. 1040-1046.

[14] J. Li, "Improved Angular Resolution for Spatial Smoothing Techniques", IEEE Transaction on Signal Processing. 1992, vol. 40, no. 12. pp. 3078-3081.

[15] F. M. Han, X. D. Zhang, "An ESPRIT-Like Algorithm for Coherent DOA Estimation", IEEE ANTENNAS AND WIRELESS PROPAGATION LETTERS, 2005, vol. 4, pp. 443-446.

[16] H. Li, K. Ichige, H Arai, "A Closed-Form DOA Estimation Formula of Multiple Coherent Waves For Uniform Linear Array", 4th International Congress on Image and Signal Processing, IEEE 2011, pp. 2588-2592.

[17] Y. Wu, Y. Cong, C. Li, "DOA Estimation of Coherent Signals Based on Matrix Reconstruction",

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} w_i(t) \\ w_{i+1}(t) \\ \vdots \\ w_{i+M-1}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{1 \times K} D^{i-1} \\ I_{1 \times K} D^i \\ \vdots \\ I_{1 \times K} D^{i+M-2} \end{bmatrix} \alpha s_1(t) + \begin{bmatrix} w_i(t) \\ w_{i+1}(t) \\ \vdots \\ w_{i+M-1}(t) \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} I_{1 \times K} \\ I_{1 \times K} D^{+1} \\ \vdots \\ I_{1 \times K} D^{M-1} \end{bmatrix} D^{i-1} \alpha s_1(t) + \begin{bmatrix} w_i(t) \\ w_{i+1}(t) \\ \vdots \\ w_{i+M-1}(t) \end{bmatrix} &= A D^{i-1} \alpha s_1(t) + w_i^f(t) \\ y_i^b = \begin{bmatrix} y_{M_0-i+1}^*(t) \\ y_{M_0-i}^*(t) \\ \vdots \\ y_{L-i+1}^*(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} s_1^*(t) \alpha^H (D^{M_0-i})^* I_{K \times 1} + w_{M_0-i+1}^*(t) \\ s_1^*(t) \alpha^H (D^{M_0-i-1})^* I_{K \times 1} + w_{M_0-i}^*(t) \\ \vdots \\ s_1^*(t) \alpha^H (D^{L-i})^* I_{K \times 1} + w_{L-i+1}^*(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{1 \times K} (D^{M_0-i})^* \alpha^* s_1^*(t) + w_{M_0-i+1}^*(t) \\ I_{1 \times K} (D^{M_0-i-1})^* \alpha^* s_1^*(t) + w_{M_0-i}^*(t) \\ \vdots \\ I_{1 \times K} (D^{L-i})^* \alpha^* s_1^*(t) + w_{L-i+1}^*(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{1 \times K} \\ I_{1 \times K} D^{+1} \\ \vdots \\ I_{1 \times K} D^{M_0-1} \end{bmatrix} D^{i-M_0} \alpha^* s_1^*(t) + \begin{bmatrix} w_{M_0-i+1}^*(t) \\ w_{M_0-i}^*(t) \\ \vdots \\ w_{L-i+1}^*(t) \end{bmatrix} = A D^{i-M_0} \alpha^* s_1^*(t) + \\ w_i^b(t) & \end{aligned}$$

پیوست ۸

هر چند ماتریس R^i از دو جمله با دترمینان صفر تشکیل شده است اما نمی‌توان نتیجه گرفت که دترمینان ماتریس R^i صفر بوده و در نتیجه از مرتبه کامل نیست. به عنوان مثال برای دو ماتریس

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \text{ با دترمینان صفر}$$

$$\det(A+B) = \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = 21 \neq 0$$

پیوست ۹

$$\text{Rank}(R_s) = \text{Rank}(PQ) =$$

$$\text{Rank} \left(\begin{bmatrix} H_1^f C_1, \dots, H_{L-1}^f C_{L-1} : H_1^b D_1, \dots, H_{L-1}^b D_{L-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^H \\ \vdots \\ C_{L-1}^H \\ \vdots \\ D_1^H \\ \vdots \\ D_{L-1}^H \end{bmatrix} \right)$$

$$H_i^b D_i \text{ و } H_i^f C_i = r_i^f D^{2i-1-L} D^{L-i} \alpha = r_i^f D^{i-1} \alpha \text{ که}$$

$$r_i^b D^{2i-L-1} D^{L-i-M_0+1} \alpha^* = r_i^b D^{i-M_0} \alpha^* \text{ می باشند.}$$

$H_i^b D_i$ و $H_i^f C_i$ دو ماتریس $K \times 1$ بوده و در نتیجه P و Q به ترتیب $2(L-1) \times K$ و $K \times 2(L-1)$ می‌باشند. اگر $K \leq 2(L-1)$ داریم:

$$\text{rank}(P) = \text{rank}(Q) = \text{rank}(PQ) = \text{rank}(R_s) = K$$

مرجع‌ها

[1] R. O. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation", IEEE Trans. Antennas Propagat, 1986, vol. 34, pp. 276–280.

[2] C. R. Dongarsane, A. N. Jadhav, "Simulation study on DOA estimation using MUSIC algorithm", gopalax -International Journal of Technology And Engineering System(IJTES), 2011, vol. 2.no1, pp. 54-57.

[3] J. Myung, S. Kim, J. Kang, "Improved DOA Estimation Based on First-Order Differential of

- [20] A. Shahedul and A. Riyasat and R. Syed Prantik and H. Ferdous and H. Ashraful, "Estimation of Direction of Arrival (DOA) Using Real-Time Array Signal Processing and Performance Analysis", IJCSNS International Journal of Computer Science and Network Security, 2010, vol.10 no.7, pp. 43-57.
- [21] H L. Van Trees, "Detection, Estimation and Modulation Theory", Wiley, New York, 1971.
- [22] C. D. Meyer, "Matrix Analysis and Applied Linear Algebra", V. Kearn, publisher at SIAM, 2004, Holland, pp. 459-475
- International Conference on Computer, Mechatronics, Control and Electronic Engineering (CMCE) IEEE 2010, pp. 280-283.
- [18] Y. H. Choi, "ESPRIT-Based Coherent Source Localization With Forward and Backward Vectors", IEEE Transaction on Signal Processing, 2010, vol. 58, no. 12, pp. 6416-6420.
- [19] Z.M.Liu, Z.T. Huang and Y.Y. Zhou, "Computationally efficient direction finding using uniform linear arrays", IET Radar Sonar Navig, 2012, Vol. 6, pp. 39-48.

